МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО"

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ

для студентів І курсу

КИЇВ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2019

УДК 512(075.8)

Лінійна алгебра. Аналітична геометрія Збірник завдань для розрахункової роботи студентів [Електронний ресурс]:навч. посіб. для студ. спеціальності 151 "Автоматизація та компьютерно-інтегровані технології ДП", 161 "Хімічні технології та інженерія ДП", 133 "Галузеве машинобудування ДП", 131 "Прикладна механіка ДП", 101 "Екологія ДП"/КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: Т. В. Авдєєва, В. В. Листопадова, В. М. Шраменко. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. –120 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського(протокол 4 від 27 квітня 2019 р.) за поданням Вченою радою фізико-математичного факультету КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 27 квітня 2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Лінійна алгебра. Аналітична геометрія

Укладачі:

Т. В. Авдєєва, ст.викладач каф. математичної фізики ФМФ;

В. В. Листопадова, канд.фіз.-мат. наук, доц. каф. математичної фізики ФМФ;

В. М. Шраменко, канд.фіз.-мат. наук, доц. каф. математичної фізики ФМФ.

Відповідальний редактор: Дудкін М.Є.,

доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри диференціальних рівнянь

ФМФ КПІ ім. Ігоря Сікорського

Рецензенти: Ганюшкін Олександр Григорович,

кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри алгебри і математичної логіки

Київського університету ім. Тараса Шевченка

Іллічева Людмила Максимівна,

кандидата фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики НАУ.

Збірник містить завдання, які необхідні для оволодіння курсом лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, що читається студентам інженерних спеціальностей НТУУ "КПІ". Окрім задач в збірнику розміщено основні теоретичні відомості та приклади розв'язування задач. Збірник буде корисним не тільки для студентів інженерних спеціальностей, але й для студентів інших спеціальностей, де курс лінійної алгебри та аналітичної геометрії виділено в окрему дисципліну.

ЗМІСТ

Вступ

Лінійна алгебра та аналітична геометрія -це фундаментальні дисципліни, що викладаються на усіх без винятку спеціальностях. Матриці та вектори - це елементи сучасної наукової мови. Неможливо уявити без них не тільки інженерні розрахунки, але й аналіз данних та економічну теорію.

Безумовно, зараз майже ніколи не виконуть громіздкі обчислення без використання ЕОМ, але перед тим, як залучати до роботи обчислювальну техніку, потрібно на простих прикладах "з'ясувати", що ж там відбувається всередині.

Враховуючи все вищезгадане та те, що обсяг навчальної дисціпліни "Вища математика" суттєво скорочено, ми сформували задачі відповідного рівня: щоб одночасно не перевантажувати студентів розрахунками та, в той же час, опрацювати ключові поняття та навички.

Самостійна робота студентів є визначальною для засвоєння основних понять математики. Одним з елементів самостійної роботи є виконання індивідуальних типових розрахунків. Розрахункова робота сприяє поглибленому засвоєнню методів розв'язання типових математичних задач, що мають прикладні значення, а також навчає студентів працювати самостійно з додатковою літературою.

Запропонований збірник містить 30 варіантів індивідуальних завдань із таких тем: матриці, визначники, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, вектори, скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, пряма на площині і в просторі, площина, лінії другого порядку.

Для виконання завдань варіанта розрахункової роботи укладачі пропонують студентам ознайомитися з теоретичним матеріалом за відповідними джерелами зі списку рекомендованої літератури, а також опрацювати наведені приклади розв'язування типових завдань.

1. Варіанти індивідуальних завдань

Варіант 1

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $A^T B - B^T A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $2A^2 - 3BC + 5E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 4$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 3x-1 & 1 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = 0$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 8, \\ -2x + 3y = 13, \\ x + 4y - 2z = 8; \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -5, \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 6. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2; -3; 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1; 2; -3)$, $\overrightarrow{c} = (5; 4; 2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (12; -8; 13)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (-1; 2; 0)$, $\overrightarrow{b} = (1; -3; 4)$, $\overrightarrow{c} = (0; 1; -2)$ знайти:

(a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;

(b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\cdot(3\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})$;

(c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)\times(2\overrightarrow{c}+3\overrightarrow{a})$;

(d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right)$.

8. Дано три точки $A(4;3), B(-2;1), C(2;-3)$. Знайти:

(a) площу трикутника ABC;

(b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;

(c) внутрішні кути трикутника;

(d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;

(e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

Зробити відповідні креслення.

9. Дано координати точок $A(2;1;-3), B(1;0;-2), C(-1;3;1), S(0;5;2)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

(a) об'ем тетраєдра $ABCS$;

(b) площу основи ABC;

(c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;

(d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;

(e) двогранний кут при ребрі AB;

(f) плоский кут ASB при вершині S;

(g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.

Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

(a) об'ем тетраєдра $ABCS$;

(b) площу основи ABC;

(c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;

(d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;

(e) двогранний кут при ребрі AB;

(f) плоский кут ASB при вершині S;

(g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.

10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.

(a) $x^2-2x+y^2-4y+1=0$;

(b) $64x^2+384x+100y^2-400y-5424=0$;

(c) $25x^2+150x-144y^2+576y-3951=0$;

(d) $8x^2+16x-y+11=0$.

Варіант 2

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $AB-BA$, якщо $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 7 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$;

(b) $A^2+2BC+3E$, якщо $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $3\cdot X+\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x)=x^3+5x^2+2x-3$ від матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 1-x & 4 \\ 2-x & x \end{vmatrix}\le -4$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґаусса, матричним методом та за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+3x_3=10, \\ -3x_1+4x_2+5x_3=-3, \\ x_1-2x_2-2x_3=1. \end{cases}$$

(b) методом Ґаусса та за формулами Крамера $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3+4x_4=5, \\ 3x_1+3x_2+2x_3-3x_4=-10, \\ 2x_1+x_2+x_3-4x_4=-14, \\ -3x_2+2x_3+3x_4=8. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(-3;2;4)$, $\overrightarrow{b}=(2;5;-1)$, $\overrightarrow{c}=(1;-1;3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d}=(-7;12;-2)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (3;2;-1)$, $\overrightarrow{b} = (1;-3;4)$, $\overrightarrow{c} = (-2;1;-2)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано три точки $A(3;3), B(-5;-3), C(-8;1)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(2;-1;-3), B(1;3;-2), C(-1;-3;1), S(3;5;4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
    (a) $x^2 - 6x + y^2 + 10y + 18 = 0$;
    (b) $100x^2 + 400x + 64y^2 - 128y - 5936 = 0$;
    (c) $144x^2 - 576x - 25y^2 - 100y - 3124 = 0$;
    (d) $x - 24y^2 - 48y - 22 = 0$.

Варіант 3

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $(AB)^T - B^T A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$;

(b) $3A^2 - 2BC - 4E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x + 1$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2+3x & x+6 \\ 2 & x \end{vmatrix} > 0$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2;1;3)$, $\overrightarrow{b} = (-3;4;-3)$, $\overrightarrow{c} = (1;-2;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (11;-13;0)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (3;1;-2)$, $\overrightarrow{b} = (1;2;-1)$, $\overrightarrow{c} = (2;-1;3)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано три точки $A(-4;2), B(3;-2), C(1;5)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(-2;3;-1), B(1;1;-2), C(3;2;-1), S(2;4;6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'ем тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 4x + y^2 + 8y + 11 = 0$;
   (b) $25x^2 + 50x + 169y^2 + 676y - 3524 = 0$;
   (c) $36x^2 + 216x - 64y^2 + 256y - 2236 = 0$;
   (d) $x - 16y^2 + 64y - 62 = 0$.

Варіант 4

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$, де $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

   (b) $A^2 + 4BC + 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $2 \cdot X + \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = -x^4 + 3x^3 + x + 2$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 2x^2 - 3 & x + 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

   $$\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 1, \\ 3x - 5y + 4z = 5, \\ 4x + 2y + 15z = -1. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 18, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{b} = (4; -3; -2)$, $\overrightarrow{c} = (-1; 5; 4)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (8; -13; -11)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (3; -1; 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1; 2; 4)$, $\overrightarrow{c} = (3; 1; -1)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано три точки $A(1; -2), B(-2; 3), C(3; 4)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(1; 2; 3), B(-3; -2; 2), C(-1; 3; -4), S(1; 3; 7)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
    (a) $x^2 + 8x + y^2 + 2y + 8 = 0$;
    (b) $100x^2 + 600x + 64y^2 - 256y - 5244 = 0$;
    (c) $144x^2 + 576x - 25y^2 + 50y - 3049 = 0$;
    (d) $x - 8y^2 + 48y - 69 = 0$.

Варіант 5

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $AB - BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

   (b) $3A^2 + 2BC - 7E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $2 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 2$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+1 & 4x \\ 2 & x-3 \end{vmatrix} \geq 8$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

   $$\begin{cases} 3x + 2y - z = -4, \\ 4x - 3y - 4z = -14, \\ -2x + y + 3z = 5. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -9, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 4. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (4; -3; 5)$, $\overrightarrow{b} = (-1; 2; 7)$, $\overrightarrow{c} = (2; -3; 1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-9; 5; -6)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (3;1;2)$, $\overrightarrow{b} = (1;-2;1)$, $\overrightarrow{c} = (2;3;-1)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано три точки $A(5;3), B(-2;-1), C(-4;4)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(4;-1;-2), B(1;2;-3), C(1;-3;1), S(2;1;4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 2x + 10 + y^2 - 10y = 0$;
   (b) $169x^2 + 1014x + 144y^2 - 576y - 22239 = 0$;
   (c) $25x^2 + 50x - 144y^2 - 864y - 4871 = 0$;
   (d) $x + 16y^2 - 32y + 19 = 0$.

Варіант 6

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $A^TB - B^TA$, якщо $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$;

(b) $2A^2 + 4BC + 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x-1 & x-2 \\ 3 & x \end{vmatrix} \leq 12$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = -1, \\ 7x + 3y - 2z = 7, \\ 4x + y + 3z = -7. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = -10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 11. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (-6; 1; 5)$, $\overrightarrow{b} = (2; 3; -1)$, $\overrightarrow{c} = (3; -2; 2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-6; 14; -2)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (-1;-2;4)$, $\overrightarrow{b} = (2;3;-1)$, $\overrightarrow{c} = (1;2;-2)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано три точки $A(-3;-2), B(1;-3), C(3;4)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .
   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(-2;-1;-3), B(4;3;-2), C(-1;0;3), S(2;-3;6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 8x + y^2 + 4y - 5 = 0$;
   (b) $100x^2 + 600x + 36y^2 - 144y - 2556 = 0$;
   (c) $-144x^2 - 576x + 25y^2 - 50y - 4151 = 0$;
   (d) $x - 12y^2 + 48y - 47 = 0$.

Варіант 7

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $(AB)^T - B^T A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

(b) $4A^2 + BC + 2E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = -3x^4 + x^2 - 5x + 1$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+1 & 2x \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} < 12 - 2x$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} 3x + y - z = -1, \\ 2x - 3y - 3z = 1, \\ -3x + 2y + 2z = -4. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (3; 2; 1)$, $\overrightarrow{b} = (-2; 1; -2)$, $\overrightarrow{c} = (1; -3; -1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-2; 13; -2)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a}=(-3;1;1)$, $\overrightarrow{b}=(1;-2;3)$, $\overrightarrow{c}=(2;-1;-2)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\cdot(3\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)\times(2\overrightarrow{c}+3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(2;3), B(4;-1), C(-3;5)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(3;2;5), B(2;-3;-2), C(-3;1;-4), S(-1;4;6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2+6x-12+y^2+4y=0$;
   (b) $144x^2-864x+169y^2+676y-22364=0$;
   (c) $-64x^2-128x+36y^2+216y-2044=0$;
   (d) $x-12y^2+48y-45=0$.

Варіант 8

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $3A^2+2BC+4E$, якщо $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $3\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}+2\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x)=2x^4-x^3+2x+7$ від матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+3 & x \\ 9 & 2x-1 \end{vmatrix}<3$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} 2x+3y+2z=-8, \\ 3x+3y+2z=-5, \\ 4x+y+2z=2. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3+x_4=-4, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-8, \\ 3x_1+2x_2+3x_3+x_4=4, \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=-2. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(1;2;3)$, $\overrightarrow{b}=(2;-3;5)$, $\overrightarrow{c}=(-1;2;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d}=(-3;-1;2)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (1;2;-1)$, $\overrightarrow{b} = (2;-3;2)$, $\overrightarrow{c} = (1;3;-1)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(3;-4), B(2;3), C(-1;-2)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .
   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(-2;3;3), B(1;2;2), C(-4;-3;3), S(2;-1;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 - 4x + y^2 - 8y - 5 = 0$;
   (b) $100x^2 + 600x + 36y^2 - 144y - 2556 = 0$;
   (c) $-144x^2 - 288x + 25y^2 + 100y - 3644 = 0$;
   (d) $x - 24y^2 - 48y - 20 = 0$.

Варіант 9

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $AB - BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$;

   (b) $5A^2 + 3BC + 2E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $4 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x+3 & x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} < 7$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера
   $$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 6, \\ x + 2y + z = 7, \\ 5x + y + z = 7. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 11, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -5, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -7. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (3; 2; 1)$, $\overrightarrow{b} = (-2; 5; 1)$, $\overrightarrow{c} = (1; -4; 3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (8; -12; 2)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (4; -1; 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1; 3; 1)$, $\overrightarrow{c} = (3; 0; 1)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(3; -5), B(-2; -3), C(1; 5)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(1; -4; 3), B(3; 1; -2), C(-2; 3; -1), S(2; 1; 7)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 8x + y^2 - 6y = 0$;
   (b) $9x^2 - 18x + 25y^2 + 100y - 116 = 0$;
   (c) $-144x^2 + 864x + 25y^2 + 100y - 4796 = 0$;
   (d) $12x^2 - 24x + y + 9 = 0$.

Варіант 10

1. Знайти значення матричного виразу

(a) $A^T B - B^T A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $3A^2 + 5BC - 4E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $4 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = x^4 - x^3 - 3x - 3$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} \leq 16$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} x + 2y - z = 11, \\ 2x - y - 3z = 4, \\ 7x - 2y + z = -3. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 3, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 19, \\ 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 12x_4 = -11, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1; -4; 3)$, $\overrightarrow{b} = (3; 2; 1)$, $\overrightarrow{c} = (-2; 5; 1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (8; -12; 2)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (4; -2; 3)$, $\overrightarrow{b} = (-2; 2; -1)$, $\overrightarrow{c} = (3; 1; 1)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(3; 5), B(-2; 3), C(-4; -2)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(4; 2; -3), B(-1; 3; -4), C(2; -3; 1), S(1; 3; 5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об’ем тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об’єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
    (a) $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$;
    (b) $169x^2 + 338x + 144y^2 + 864y - 22871 = 0$;
    (c) $16x^2 + 64x - 9y^2 + 18y - 89 = 0$;
    (d) $16x^2 + 32x - y + 12 = 0$.

Варіант 11

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $(AB)^T - B^T A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$;

(b) $A^2 + 2BC + E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $2 \cdot X + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = -4x^4 + x^2 - 5x + 3$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x-1 & 9 \\ x & x+3 \end{vmatrix} > -3$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = -15, \\ 2x + 5y - z = 24, \\ 5x - 2y + z = -5. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (5; -3; 4)$, $\overrightarrow{b} = (7; 2; -1)$, $\overrightarrow{c} = (1; -3; 2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-6; 5; -9)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (2; -5; -1)$, $\overrightarrow{b} = (-3; 3; 1)$, $\overrightarrow{c} = (1; -3; 2)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(-3; 1), B(4; -3), C(2; 4)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(3; 2; -1), B(4; -2; 2), C(-3; -2; -5), S(2; 4; 6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'ем тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 - 8x + y^2 - 4y - 5 = 0$;
   (b) $169x^2 + 676x + 25y^2 - 150y - 3324 = 0$;
   (c) $25x^2 + 50x - 144y^2 - 576y - 4151 = 0$;
   (d) $x - 17 - 4y^2 - 16y$.

Варіант 12

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

   (b) $2A^2 + 4BC - 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 7x^3 + 2x^2 - 3x - 2$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+5 & x \\ 2 & x-1 \end{vmatrix} \geq -2$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

   $$\begin{cases} 2x + 3y - z = 16, \\ 3x - 5y - 5z = -7, \\ -5x + 2y + 3z = -3. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 8x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 + 5x_4 = -4. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1; 2; -1)$, $\overrightarrow{b} = (3; 2; 1)$, $\overrightarrow{c} = (5; -3; 2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (2; -1; -3)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (2;1;2)$, $\overrightarrow{b} = (1;4;-2)$, $\overrightarrow{c} = (-1;1;3)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(-1;-2), B(3;-4), C(-1;3)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(5;-1;-5), B(2;1;-1), C(-4;-2;3), S(3;-3;6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'ем тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
    (a) $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 11 = 0$;
    (b) $100x^2 + 600x + 64y^2 - 256y - 5244 = 0$;
    (c) $36x^2 + 144x - 64y^2 + 128y - 2224 = 0$;
    (d) $-4x^2 - 8x + y - 6 = 0$.

Варіант 13

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $AB - BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

   (b) $2A^2 + 3BC - 4E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $2 \cdot X + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x - 3$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x-3 & x+1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} < x^2 - 16$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера
   $$\begin{cases} x - 3y + 2z = 10, \\ 2x + 5y - z = -1, \\ 2x - 2y + 9z = -10. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 12, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -9. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2; 1; 4)$, $\overrightarrow{b} = (4; -2; -1)$, $\overrightarrow{c} = (-5; 3; -2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (24; -11; 5)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (-1;3;3)$, $\overrightarrow{b} = (1;2;-3)$, $\overrightarrow{c} = (2;-1;1)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(5;1), B(-2;4), C(-4;-3)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(-1;3;-5), B(2;1;-1), C(4;-1;2), S(2;-1;4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
    (a) $x^2 - 6x + 21 + y^2 - 8y = 0$;
    (b) $25x^2 + 50x + 169y^2 + 676y - 3524 = 0$;
    (c) $-64x^2 - 256x + 36y^2 - 72y - 2524 = 0$;
    (d) $x - 63 - 16y^2 + 64y = 0$.

Варіант 14

1. Знайти значення матричного виразу

(a) $A^T B - B^T A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $3A^2 - BC + 4E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $5 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 3x^4 + x^3 - x + 1$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x-1 & 2x \\ x+2 & x+3 \end{vmatrix} \le -3$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} -2x + y + 3z = 13, \\ 3x + 2y + 4z = -4, \\ 2x + y + 5z = -1. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = -9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -5. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (3; 5; 2)$, $\overrightarrow{b} = (-1; -2; 1)$, $\overrightarrow{c} = (-2; 4; -3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (11; 3; 14)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (2; -2; 3)$, $\overrightarrow{b} = (1; 1; 4)$, $\overrightarrow{c} = (1; -3; 3)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано три точки $A(1; -3), B(5; 1), C(-2; 4)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(-1; 4; -2), B(4; 3; 2), C(-2; -3; -1), S(3; 1; 5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'ем тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 2x + y^2 - 8 = 0$;
   (b) $100x^2 + 400x + 36y^2 - 72y - 3164 = 0$;
   (c) $-144x^2 - 288x + 25y^2 - 150y - 3519 = 0$;
   (d) $12x^2 + 24x - y + 14 = 0$.

Варіант 15

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $(AB)^T - B^T A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $A^2 + 2BC - 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $3 \cdot X + 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 5$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 3x-2 & 4x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} > -6$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Гауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5z = -5, \\ -3x - y + 2z = 13, \\ x + 2y + z = -6. \end{cases}$$

(b) методом Гауса $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -11, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2; 1; 3)$, $\overrightarrow{b} = (3; -2; 1)$, $\overrightarrow{c} = (-1; 4; -2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-8; 20; -3)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (3; -1; 2)$, $\overrightarrow{b} = (4; -2; -3)$, $\overrightarrow{c} = (1; 1; -2)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(5; -1), B(-1; 3), C(-2; -4)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(-3; -1; 1), B(2; 1; -2), C(1; -2; 3), S(4; -2; 5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2y = 0$;
   (b) $25x^2 - 200x + 9y^2 - 36y + 211 = 0$;
   (c) $144x^2 + 288x - 25y^2 + 150y - 3681 = 0$;
   (d) $-4x^2 - 8x - 7 + y = 0$.

Варіант 16

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$, $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

   (b) $3A^2 + 3BC - 7E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 2$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x^2+1 & x+2 \\ 1-x & -2 \end{vmatrix} < -4$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

   $$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = -3, \\ -2x + 3y + 2z = -2, \\ -2y + 3z = -7. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -9, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2; 1; -3)$, $\overrightarrow{b} = (-1; 3; 1)$, $\overrightarrow{c} = (3; -2; -1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-1; 10; -6)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (1;-2;1)$, $\overrightarrow{b} = (2;3;-4)$, $\overrightarrow{c} = (2;-3;2)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(3;-2), B(2;4), C(-3;-4)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(3;-2;-1), B(4;2;-4), C(-2;1;3), S(2;-1;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$;
   (b) $16x^2 + 96x + 25y^2 - 100y - 156 = 0$;
   (c) $-25x^2 - 50x + 144y^2 + 576y - 3049 = 0$;
   (d) $4x^2 + 8x + 1 + y = 0$.

Варіант 17

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $AB - BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

   (b) $2A^2 + 4BC - 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 2x^4 + x^3 - 4x + 1$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x - x^2 & 3x \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \geq 13x$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

   $$\begin{cases} -2x - 5y + z = 12, \\ 2x + 4y + 3z = 6, \\ 3x + y + z = 5. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 - 2x_3 + 6x_4 = -2, \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2; 3; 1)$, $\overrightarrow{b} = (1; -4; 2)$, $\overrightarrow{c} = (1; 2; -3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (0; -8; 19)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (3; -2; 0)$, $\overrightarrow{b} = (0; 1; 2)$, $\overrightarrow{c} = (2; -1; 3)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(-3; -4), B(-1; 3), C(2; 1)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(-1; 2; -1), B(4; 1; -2), C(1; 2; -4), S(2; 3; 5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y = 0$;
   (b) $25x^2 + 150x + 9y^2 - 36y + 36 = 0$;
   (c) $-36x^2 - 144x + 64y^2 - 128y - 2384 = 0$;
   (d) $x - 8y^2 + 48y - 70 = 0$.

Варіант 18

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $A^T B - B^T A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

   (b) $4A^2 - 3BC - 5E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x & 4 \\ x-2 & x+3 \end{vmatrix} \leq 8 - 7x$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера
   $$\begin{cases} 5x + y + z = 7, \\ 3x - 3y - z = 5, \\ 2x + 6y + 3z = 2. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 15. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2; 1; 3)$, $\overrightarrow{b} = (-3; 2; -1)$, $\overrightarrow{c} = (4; -5; 2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (4; -12; -5)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (0;1;-2)$, $\overrightarrow{b} = (-1;2;3)$, $\overrightarrow{c} = (2;3;1)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(4;3), B(2;-1), C(-1;-4)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .
   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(4;2;-2), B(3;-1;-1), C(1;5;2), S(3;-2;4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 15 = 0$;
   (b) $100x^2 + 400x + 36y^2 - 72y - 3164 = 0$;
   (c) $64x^2 + 128x - 36y^2 - 216y - 2564 = 0$;
   (d) $x - 4y^2 - 16y - 13 = 0$.

Варіант 19

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $(AB)^T - B^T A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $4A^2 - 5BC + 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = x^4 + x^3 - x + 6$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2x-3 & x^2+3 \end{vmatrix} < 69$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґаусса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} x + 3y - 3z = 4, \\ 7x + 3y - 3z = 10, \\ 4x - y + 2z = 0. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 13, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 9, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -1. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (3; -2; 4)$, $\overrightarrow{b} = (-4; 1; -3)$, $\overrightarrow{c} = (5; -3; 3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (0; -3; 1)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (2;4;1)$, $\overrightarrow{b} = (1;-2;3)$, $\overrightarrow{c} = (-1;3;2)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(-1;-3), B(2;-1), C(-1;2)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(1;-4;-1), B(3;2;-3), C(-1;-4;2), S(-3;1;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
    (a) $x^2 + 2x - 15 + y^2 - 6y = 0$;
    (b) $25x^2 + 150x + 16y^2 - 64y - 111 = 0$;
    (c) $-36x^2 - 216x + 64y^2 - 256y - 2372 = 0$;
    (d) $x + 18 + 16y^2 - 32y = 0$.

Варіант 20

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$, $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $3A^2 + 2BC + 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 3x - 4$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 1-x & 3x \\ 2 & 2x-1 \end{vmatrix} < -6$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} 2x - y + 8z = -20, \\ -x + 3y - 4z = 5, \\ 3x - y + 3z = -4. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2; 5; -1)$, $\overrightarrow{b} = (-3; 2; 4)$, $\overrightarrow{c} = (1; 3; -1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (0; 9; 3)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (3; -1; 2)$, $\overrightarrow{b} = (1; 2; 4)$, $\overrightarrow{c} = (-1; -2; 3)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(5; 1), B(-3; -1), C(-4; 3)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .
   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(1; -5; -1), B(3; 1; -2), C(4; -3; 3), S(1; 2; 6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 - 6x - 3 + y^2 - 4y = 0$;
   (b) $25x^2 + 100x + 16y^2 - 32y - 284 = 0$;
   (c) $-9x^2 - 36x + 16y^2 - 32y - 164 = 0$;
   (d) $4x^2 + 16x + 13 + y = 0$.

Варіант 21

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $AB - BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$;

   (b) $A^2 + 3BC + 2E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $3 \cdot X + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x-2 & x+1 \\ 3 & x \end{vmatrix} < 3$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера
   $$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 8, \\ 3x + y + 3z = -8, \\ x + y + 6z = -19. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 11. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1; 3; -2)$, $\overrightarrow{b} = (-2; -5; 3)$, $\overrightarrow{c} = (1; 1; -2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-3; -4; 3)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (3;-1;2)$, $\overrightarrow{b} = (0;2;-3)$, $\overrightarrow{c} = (1;2;-6)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(-3;4), B(3;2), C(-1;-3)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(-1;-2;-5), B(2;-3;-1), C(-3;1;2), S(1;3;6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'ем тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 - 4x - 11 + y^2 + 2y = 0$;
   (b) $16x^2 - 64x + 25y^2 + 150y - 111 = 0$;
   (c) $-25x^2 - 50x + 144y^2 - 576y - 3049 = 0$;
   (d) $x - 15 - 4y^2 + 16y = 0$.

Варіант 22

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $A^T B - B^T A$, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$;

   (b) $3A^2 - 4BC + 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $3 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = x^4 - x^2 + 5x + 2$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x & x+3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} < x^2 - 9$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

   $$\begin{cases} -3x + 2y - 3z = 2, \\ -2x + y - 3z = 5, \\ 5x - y + 3z = -2. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (-3; 5; -2)$, $\overrightarrow{b} = (4; -2; 3)$, $\overrightarrow{c} = (2; 1; 3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-8; 17; -1)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (2; 1; -3)$, $\overrightarrow{b} = (1; -2; 1)$, $\overrightarrow{c} = (3; -2; 4)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(4; 3), B(-2; 1), C(1; 5)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .
   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(-2; -1; -1), B(3; 2; -3), C(-1; -3; 2), S(2; 1; 4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'ем тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити всі її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 4x - 3 + y^2 + 6y = 0$;
   (b) $9x^2 + 54x + 25y^2 - 100y - 44 = 0$;
   (c) $-144x^2 + 576x + 25y^2 + 100y - 4076 = 0$;
   (d) $x - 4y^2 - 16y - 15 = 0$.

Варіант 23

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $(AB)^T - B^T A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

   (b) $4A^2 - 2BC + 5E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $5 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x - 4$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 4x^2 & 2x - 1 \end{vmatrix} < 11x^2 - 40$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера
   $$\begin{cases} x + 2y + 4z = 8, \\ 2x + y - 2z = -3, \\ 3x - y + z = -8. \end{cases}$$

   (b) методом Ґаусса $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 12, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (4; 3; 1)$, $\overrightarrow{b} = (-1; 5; -2)$, $\overrightarrow{c} = (2; -1; -3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (13; -15; -2)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (4;1;-3)$, $\overrightarrow{b} = (3;-2;4)$, $\overrightarrow{c} = (-1;2;3)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(5;3), B(-2;4), C(1;-3)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(5;2;-1), B(1;-2;-3), C(-2;-1;1), S(3;1;4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
    (a) $x^2 - 6x - 3 + y^2 - 4y = 0$;
    (b) $100x^2 + 400x + 64y^2 - 128y - 5936 = 0$;
    (c) $144x^2 - 864x - 25y^2 - 100y - 2404 = 0$;
    (d) $12x^2 - 48x + 49 - y = 0$.

Варіант 24

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$, $A=\begin{pmatrix}-6&-2&0\\0&2&5\\-1&3&7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-2&1\\1&3&-4\\3&-2&0\end{pmatrix}$;

(b) $3A^2+2BC-4E$, якщо $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&2\\1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\-2&1\\-1&2\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}-3&-1&3\\3&3&1\end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $\begin{pmatrix}11&4\\-2&7\end{pmatrix}+4\cdot X=\begin{pmatrix}3&-12\\10&3\end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix}6&6\\2&1\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}-4&3\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-2\\1&-1\end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x)=x^4-x^3+x^2-3$ від матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix}5x+1&3x\\2-x&x\end{vmatrix}>9x^2$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases}2x-7y+3z=-7,\\3x+5y+6z=2,\\x-3y+2z=-4.\end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases}-3x_1+x_2+x_3+2x_4=-12,\\3x_1+2x_2+x_3+4x_4=-3,\\2x_1+x_2-2x_3+x_4=9,\\x_1-5x_2+x_3-3x_4=0.\end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(1;2;3)$, $\overrightarrow{b}=(-2;1;-4)$, $\overrightarrow{c}=(5;-3;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d}=(9;-11;-8)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (3;2;-3)$, $\overrightarrow{b} = (-1;1;2)$, $\overrightarrow{c} = (2;4;1)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(5;1), B(-2;-1), C(1;3)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(4;-2;-1), B(3;3;2), C(1;4;-3), S(2;-1;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y = 0$;
   (b) $16x^2 + 96x + 25y^2 - 100y - 156 = 0$;
   (c) $-25x^2 - 50x + 144y^2 + 864y - 2329 = 0$;
   (d) $12x^2 + 48x + y + 44 = 0$.

Варіант 25

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $AB-BA$, якщо $A=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & 3 & -7 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $2A^2-4BC+3E$, якщо $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $2\cdot\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}+3\cdot X=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x)=-2x^3+3x^2-3x+7$ від матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x+1 & 4 \\ 2+x & 1-3x \end{vmatrix}>-16-6x^2$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} -x-y+5z=-14, \\ 4x+2y+2z=10, \\ 5x-3y+z=10. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3+x_4=1, \\ -x_1+x_2+2x_3+3x_4=-2, \\ 3x_1-2x_2-x_3+2x_4=-3, \\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4=2. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(1;3;-2)$, $\overrightarrow{b}=(-2;-5;3)$, $\overrightarrow{c}=(1;1;-2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d}=(-3;-4;3)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (2; 2; -1)$, $\overrightarrow{b} = (1; 3; -3)$, $\overrightarrow{c} = (3; 1; -2)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(-4; 3), B(2; -2), C(-2; -4)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .
   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(4; -2; 3), B(-2; 2; -3), C(1; -4; 2), S(2; 3; 6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 8x + 8 + y^2 - 2y = 0$;
   (b) $9x^2 - 18x + 25y^2 + 100y - 116 = 0$;
   (c) $144x^2 + 288x - 25y^2 - 100y - 3556 = 0$;
   (d) $16x^2 - 32x - y + 13 = 0$.

Варіант 26

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $A^TB - B^TA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$;

(b) $3A^2 - 5BC - 3E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $4 \cdot X - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = -x^4 - x^3 + 3x + 4$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 3x & 2+x \\ x-4 & -x \end{vmatrix} = -2x$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} -2x + 7y - 2z = 5, \\ 2x + 5z = -4, \\ -x + 4y - 3z = 7. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 15. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (-1; 5; 2)$, $\overrightarrow{b} = (-3; 4; -1)$, $\overrightarrow{c} = (2; 3; -1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-2; 8; 8)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (3;2;-2)$, $\overrightarrow{b} = (1;3;-1)$, $\overrightarrow{c} = (2;1;3)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.

   Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
8. Дано координати точок $A(1;3;-2), B(3;2;-1), C(-2;1;3), S(4;-1;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'ем тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
9. Дано точки $A(3;2), B(-2;1), C(1;-4)$.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
    (a) $x^2 + 2x + 8 + y^2 - 8y = 0$;
    (b) $25x^2 + 150x + 16y^2 - 64y - 111 = 0$;
    (c) $9x^2 + 36x - 16y^2 + 32y - 124 = 0$;
    (d) $-4x^2 - 8x - 1 + y = 0$.

Варіант 27

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $(AB)^T - B^TA^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 7 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

(b) $-2A^2 + 4BC + 5E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 3x+1 & x-2 \\ 5-x & 2 \end{vmatrix} > 24$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 1, \\ x + y - z = 6, \\ 2x - 4y - z = 4. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (-3; 1; -2)$, $\overrightarrow{b} = (4; -2; 1)$, $\overrightarrow{c} = (1; 4; 3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (19; -4; 10)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (5; -1; 2)$, $\overrightarrow{b} = (3; 1; 4)$, $\overrightarrow{c} = (2; 3; 1)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(-2; -2), B(3; -4), C(-1; 3)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(-2; -3; -1), B(3; 1; -3), C(-2; 1; 2), S(-3; 2; 4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'ем тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
    (a) $x^2 + 2x + 6 + y^2 + 6y = 0$;
    (b) $25x^2 - 200x + 9y^2 - 36y + 211 = 0$;
    (c) $-64x^2 - 384x + 36y^2 - 72y - 2844 = 0$;
    (d) $x - 4y^2 - 16y - 19 = 0$.

Варіант 28

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$, $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

   (b) $-3A^2+4BC+2E$, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

   $C=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $7\cdot X-2\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x)=2x^4-x^2+x+5$ від матриці A, якщо $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 4x-1 & x+1 \\ 3 & x \end{vmatrix}=5$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера
   $$\begin{cases} -x+2y+2z=10, \\ 3x+y+4z=-6, \\ 3x+8y-4z=0. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} 2x_1+5x_2+x_3-x_4=2, \\ x_1-3x_2-2x_3+3x_4=12, \\ -x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ -2x_1+3x_2-5x_3+9x_4=6. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a}=(-4;2;3)$, $\overrightarrow{b}=(2;-3;4)$, $\overrightarrow{c}=(3;1;-2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d}=(-4;13;-13)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (-2; 3; 2)$, $\overrightarrow{b} = (1; -2; 3)$, $\overrightarrow{c} = (3; 1; -1)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(3; -1), B(-1; -3), C(-4; 3)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .
   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(2; -1; -2), B(1; 3; -1), C(-2; 1; 2), S(3; -2; 4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 2x - 4 + y^2 - 4y = 0$;
   (b) $25x^2 + 150x + 9y^2 - 36y + 36 = 0$;
   (c) $64x^2 + 384x - 36y^2 + 72y - 1764 = 0$;
   (d) $x - 13 - 4y^2 + 16y = 0$.

Варіант 29

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $AB - BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 7 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $4A^2 - 5BC + 2E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 5 \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 9$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} 2x+5 & 3x \\ -2 & x-1 \end{vmatrix} < x - 5$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = -13, \\ -2x + 3y + 5z = 5, \\ 4x - 3y + 7z = 1. \end{cases}$$

(b) методом Ґауса $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 9. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (5; 2; -2)$, $\overrightarrow{b} = (2; -1; 1)$, $\overrightarrow{c} = (-4; 3; 2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-24; 6; 9)$ за векторами $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (5; 2; -3)$, $\overrightarrow{b} = (2; -3; 1)$, $\overrightarrow{c} = (1; -2; -3)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(-3; 4), B(-1; -2), C(4; 2)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .
   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(5; -1; 3), B(2; 3; -1), C(-2; -4; 3), S(-4; 1; 4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 4x + y^2 + 6y - 12 = 0$;
   (b) $16x^2 - 64x + 25y^2 + 150y - 111 = 0$;
   (c) $64x^2 + 256x - 36y^2 + 72y - 2084 = 0$;
   (d) $-4x^2 + 8x - 2 + y = 0$.

Варіант 30

1. Знайти значення матричного виразу:

   (a) $(AB)^T - B^T A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$;

   (b) $-3A^2 + 4BC + 2E$, якщо $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,

   $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

   (a) $5 \cdot X - 2 \cdot \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

   (b) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 5x^4 - x^3 + 3x - 4$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x+3 & 3 \\ 1-x & 2x-1 \end{vmatrix} > 4$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

   (a) методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера
   $$\begin{cases} 3x + 7y + 3z = 2, \\ 2x + y - z = -3, \\ -2x - 3y + 4z = -4. \end{cases}$$

   (b) методом Ґауса $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -6, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 9, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 = 9. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1; 5; -2)$, $\overrightarrow{b} = (1; 2; 3)$, $\overrightarrow{c} = (3; -4; 1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (2; -12; 8)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (4; -3; 1)$, $\overrightarrow{b} = (5; 2; -1)$, $\overrightarrow{c} = (-3; 4; 2)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(1; 2), B(0; -3), C(-1; 4)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .
   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(3; -3; 2), B(1; 2; -3), C(-1; 2; -2), S(-1; -2; 4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + 6x + 6 + y^2 - 2y = 0$;
   (b) $9x^2 + 54x + 25y^2 - 100y - 44 = 0$;
   (c) $64x^2 + 128x - 36y^2 + 72y - 2276 = 0$;
   (d) $-4x^2 - 8x - 6 - y = 0$.

Варіант 31

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $2AB - BA$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

(b) $2A^2 + 3BC - 4E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $\begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 2x^4 + x^2 - 3x + 1$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння: $\begin{vmatrix} 3x - 1 & -1 \\ x + 1 & -x \end{vmatrix} = 0$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Гаусса, матричним методом та за формулами Крамера

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3, \\ 2x - 3y + 2z = -1, \\ 3x + 5y + z = 2. \end{cases}$$

(b) методом Гаусса та за формулами Крамера $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 14, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -9, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (1; 3; 2)$, $\overrightarrow{b} = (-2; 1; 3)$, $\overrightarrow{c} = (4; -2; -1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (20; -3; -8)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (5;3;2)$, $\overrightarrow{b} = (2;-3;1)$, $\overrightarrow{c} = (-2;1;4)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(1;-3), B(3;1), C(-2;3)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(4;1;-2), B(3;-3;3), C(-1;1;-3), S(1;2;5)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'ем тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
   (a) $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$;
   (b) $36x^2 + 216x + 100y^2 - 400y - 2876 = 0$;
   (c) $-64x^2 - 256x + 36y^2 - 72y - 2524 = 0$;
   (d) $8x^2 - 16x + 5 - y = 0$.

Варіант 32

1. Знайти значення матричного виразу:

(a) $A^TB - B^TA$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$;

(b) $-A^2 + 2BC + 4E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Розв'язати матричні рівняння:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$;

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

3. Знайти значення многочлена $f(x) = 2x^4 + x^3 + x + 4$ від матриці A, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Розв'язати рівняння або нерівність: $\begin{vmatrix} 2x+3 & -x \\ 3-x & x \end{vmatrix} = 0$.

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

(a) методом Ґаусса, матричним методом та за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -13, \\ 3x - 2y + 4z = -11, \\ x + 4y - z = 8. \end{cases}$$

(b) методом Ґаусса та за формулами Крамера $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

6. Дано вектори $\overrightarrow{a} = (2; 1; -1)$, $\overrightarrow{b} = (-3; 5; 2)$, $\overrightarrow{c} = (2; 3; 1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора $\overrightarrow{d} = (-1; 2; -3)$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$.

7. Для заданих векторів $\overrightarrow{a} = (5; -2; 1)$, $\overrightarrow{b} = (-2; 3; 2)$, $\overrightarrow{c} = (-3; 1; -2)$ знайти:
   (a) напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}$;
   (b) скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}\right) \cdot (3\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})$;
   (c) векторний добуток $\left(\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right) \times (2\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a})$;
   (d) проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c} - 2\overrightarrow{b}\right)$.
8. Дано точки $A(4; 3), B(-2; 1), C(2; -3)$. Знайти:
   (a) площу трикутника ABC;
   (b) рівняння та довжину висоти, проведену з вершини A;
   (c) внутрішні кути трикутника;
   (d) кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C;
   (e) рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні AC .

   Зробити відповідні креслення.
9. Дано координати точок $A(4; -2; -1), B(5; 1; -2), C(-3; 2; -1), S(1; -3; 4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
   (a) об'єм тетраєдра $ABCS$;
   (b) площу основи ABC;
   (c) довжину висоти S піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;
   (d) кут нахилу ребра AS до площини ABC;
   (e) двогранний кут при ребрі AB;
   (f) плоский кут ASB при вершині S;
   (g) точку перетину висоти піраміди з основою ABC.
10. На площині задано криву другого поряку. Знайти канонічне та загальне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.
    (a) $x^2 + 4x + y^2 + 2y - 4 = 0$;
    (b) $25x^2 + 100x + 16y^2 - 32y - 284 = 0$;
    (c) $-16x^2 - 64x + 9y^2 - 18y - 199 = 0$;
    (d) $8x^2 - 16x + 5 - y = 0$.

2. Приклади розв'язування задач

Задача 1. *Знайти значення матричного виразу $AB - BA$, якщо*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -6 \\ 1 & 6 & -5 \\ 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ 9 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -6 \\ 1 & 6 & -5 \\ 5 & 9 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ 9 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 14 & -3 \\ -8 & 4 & -10 \\ -6 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що ми отримали $AB - BA \neq 0$, тобто $AB \neq BA$.

Відповідь: $AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 14 & -3 \\ -8 & 4 & -10 \\ -6 & 9 & -6 \end{pmatrix}.$ □

Задача 2. *З'ясувати, чи має місце рівність* $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, *якщо* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. *Відповідь обґрунтувати.*

Розв'язування. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, тому ліва частина рівності дорівнює: $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 35 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$

З іншого боку, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 25 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}.$

$$2 \cdot A \cdot B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 13 & -5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & -10 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому права частина рівності дорівнює:

$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix} -9 & 25 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 26 & -10 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 26 & 15 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, порівнюючи ліву та праву частину, отримаємо:

$$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2.$$

Рівність не виконується, оскільки $AB \neq BA$.

Відповідь: Рівність не виконується. □

Задача 3. *Знайти значення матричного виразу $A^TB - B^TA$, якщо*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. $A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$

$$B^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^TB - B^TA = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 7 & 2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 1 & 7 \\ -2 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^TB - B^TA = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$ □

Задача 4. *Знайти значення матричного виразу $(A+B)(B-A)+A^2-B^2$, якщо*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. $A+B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$

$$B-A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(A+B)(B-A)=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2\\ 1 & 6 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 18 & -10\\ 0 & 3 & -6\\ 2 & 6 & 4\end{pmatrix}.$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ -2 & 11 & -6\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

$$B^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 9 & 0\\ 5 & 11 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

$$(A+B)(B-A)+A^2-B^2=$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 18 & -10\\ 0 & 3 & -6\\ 2 & 6 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0\\ -2 & 11 & -6\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 7 & 9 & 0\\ 5 & 11 & -1\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 11 & -10\\ -7 & 3 & -11\\ -1 & 5 & 0\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(A+B)(B-A)+A^2-B^2=\begin{pmatrix} -3 & 11 & -10\\ -7 & 3 & -11\\ -1 & 5 & 0\end{pmatrix}.$ □

Задача 5. *Знайти значення матричного виразу* $(AB)^T-A^TB^T$, *якщо*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язування. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1\\ 4 & 0 & 3\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2\\ -3 & 4 & -7\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix}.$

$$(AB)^T=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0\\ 2 & 4 & 3\\ -2 & -7 & 3\end{pmatrix}.$$

$$A^T\cdot B^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1\\ -1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 & 4\\ -4 & -4 & -1\\ 1 & 10 & 4\end{pmatrix}.$$

$$(AB)^T-A^TB^T=\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0\\ 2 & 4 & 3\\ -2 & -7 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & 7 & 4\\ -4 & -4 & -1\\ 1 & 10 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -10 & -4\\ 6 & 8 & 4\\ -3 & -17 & -1\end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що ми отримали $(AB)^T-A^TB^T\neq 0$, тобто $(AB)^T\neq A^TB^T$.

Відповідь: $(AB)^T - A^T B^T = \begin{pmatrix} -7 & -10 & -4 \\ 6 & 8 & 4 \\ -3 & -17 & -1 \end{pmatrix}.$ $\square$

Задача 6. *Знайти значення матричного виразу* $-2A^2 + 3BC + 4E$, *якщо* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Знайдемо складові виразу:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 3 \\ -4 & 5 & 5 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$-2A^2 = -2 \begin{pmatrix} 7 & -6 & 3 \\ -4 & 5 & 5 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 12 & -6 \\ 8 & -10 & -10 \\ 8 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & -10 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$3 \cdot BC = 3 \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -6 & -7 & -10 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 12 & 0 \\ -18 & -21 & -30 \\ 21 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4E = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$-2A^2 + 3BC + 4E = \begin{pmatrix} -14 & 12 & -6 \\ 8 & -10 & -10 \\ 8 & -8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 21 & 12 & 0 \\ -18 & -21 & -30 \\ 21 & 12 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 24 & -6 \\ -10 & -27 & -40 \\ 29 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $-2A^2 + 3BC + 4E = \begin{pmatrix} 11 & 24 & -6 \\ -10 & -27 & -40 \\ 29 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$ $\square$

Задача 7. *Розв'язати рівняння:*

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Оскільки $3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$, то

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -9 & -12 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -16 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 \\ -16 & -4 & -6 \end{pmatrix}$. □

Задача 8. *Розв'язати рівняння:*

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T - 3X^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}^T,$$

де через T позначена операція транспонування матриці.

Розв'язування. Маємо, $2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Крім того, $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + (-6) \cdot (-5) & 1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + (-6 \cdot (-6)) \\ 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-5) & 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 & 58 \\ -25 & -22 \end{pmatrix}.$$

Отже, $3X^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 43 & 58 \\ -25 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & -54 \\ 15 & 30 \end{pmatrix}$,

$$X^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -45 & -54 \\ 15 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -18 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тоді $X = \begin{pmatrix} -15 & 5 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} -15 & 5 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}$. □

Задача 9. *Розв'язати матричне рівняння*
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

Розв'язування. Оскільки $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot X = 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, то
$$3X = 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$
$$3X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. □

Задача 10. *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язування. $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 14.$

Відповідь: 14. □

Задача 11. *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язування. Для знаходження визначника використаємо правило "трикутника".
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 7 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 7 \cdot (-1) = -5.$$

Відповідь: -5. □

Задача 12. *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язування. Визначник трикутної матриці дорівнює добутку діагональних елементів, тому $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -6.$

Відповідь: -6. $\square$

Задача 13. *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язування. Визначник дорівнює нулю, бо перший і третій стовпчики пропорційні.
Відповідь: 0. $\square$

Задача 14. *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язування. Використаємо теорему про розклад визначника за елементами стовпця. Розкриваючи визначник за третім стовпчиком, одержимо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Додаючи в останньому визначнику до третього рядка другий, помножений на -3, а потім розкриваючи його за третім стовпчиком, одержимо:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = -5.$$

Отже, початковий визначник дорівнює $(-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot (-5) = -15$.
Відповідь: -15. $\square$

Задача 15. *Обчислити визначник* $\begin{vmatrix} 2019 & 2020 & 2021 & 2022 \\ 2023 & 2018 & 2024 & 2026 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2030 & 2033 & 2038 & 2037 \end{vmatrix}$.

Розв'язування. Віднімаючи від 1–го, 2–го і 4–го рядків відповідні кратні 3–го рядка, а потім розкриваючи його за 1–м стовпчиком, одержимо:

$$\begin{vmatrix} 2019 & 2020 & 2021 & 2022 \\ 2023 & 2018 & 2024 & 2026 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2030 & 2033 & 2038 & 2037 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} =(-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix}.$$

Далі віднімемо від 2–го і 3–го стовпчиків відповідні кратні 1–го стовпчика і розкриємо за 1–м рядком:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 11 & 18 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 18 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

Відповідь: -14. □

Задача 16. *Знайти обернену матрицю для матриці* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. За формулою для оберненої матриці $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ де A_{ij} — алгебричні доповнення елементів матриці. Знайдемо визначник матриці та алгебричні доповнення елементів: $detA = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 3$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 8 = 8, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

Тоді $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

В загальному випадку, для $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ обернену матрицю знаходимо за формулою: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, тобто елементи головної діагоналі міняються місцями, а елементи другої діагоналі беруться з протилежним знаком. При цьому, як і в основній формулі, треба помножити знайдену матрицю на $\dfrac{1}{\det A}$.

Перевірка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. □

Задача 17. *Знайти обернену матрицю для матриці* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Використаємо формулу : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$. Знайдемо визначник матриці та алгебричні доповнення елементів:
$\det A = 13$.

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9,$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2,$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6.$

Тоді $A^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Перевірка: $A \cdot A^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$,

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. □

Задача 18. *Знайти обернену матрицю для матриці* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язування. Знайдемо обернену матрицю методом елементарних перетворень рядків (приєднанням одиничної матриці) (над стрілкою вказані операції над рядками матриці): $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-I+III \to III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{II:4 \to II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{II \cdot 2+III \to III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{III:2 \to III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[III:2+II \to II]{III+I \to I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$

$\xrightarrow{II \cdot (-2)+I \to I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right).$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$ □

Задача 19. *Розв'язати матричне рівняння* $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$

Розв'язування. Позначимо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. Тоді рівняння можна переписати у вигляді $AX = B$. Оскільки $|A| = 8 + 3 = 11$, тому матриця A невироджена і для неї існує обернена матриця A^{-1}. Оскільки $AX = B$, то $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$. Так як
$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, тому
$X = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 33 & 55 \\ 11 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Відповідь:$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$ □

Задача 20. *Розв'язати матричне рівняння:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Позначимо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ невироджені, тому

$$A \cdot X \cdot B = C \;\Rightarrow A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Оскільки

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

то

$$X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -20 & 28 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -20 & 28 \\ -7 & -7 \end{pmatrix}$. □

Задача 21. *Розв'язати матричні рівняння*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Позначимо $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ невироджені, тому

$$A \cdot X \cdot B = C \;\Rightarrow A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Оскільки

$$A^{-1}=\frac{1}{-14}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

то

$$X = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -20 & -8 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -104 & -28 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $X = \frac{-1}{14}\begin{pmatrix} -104 & -28 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$ □

Задача 22. *Розв'язати матричне рівняння.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ 5 & -3 & 8 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 1 & 12 & -7 \\ 20 & -17 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Аналогічно попередньому прикладу маємо:

$$A \cdot X \cdot B + C = D \Rightarrow A \cdot X \cdot B = D - C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot (D - C) \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (D - C) \cdot B^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \ B^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D - C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -4 & 15 & -15 \\ 24 & -18 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -4 & 15 & -15 \\ 24 & -18 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, $X = \frac{1}{13 \cdot 8}\begin{pmatrix} 266 & -91 & -210 \\ 188 & -78 & -28 \\ 1310 & -897 & -142 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $X = \frac{1}{104}\begin{pmatrix} 266 & -91 & -210 \\ 188 & -78 & -28 \\ 1310 & -897 & -142 \end{pmatrix}.$ □

Задача 23. *Знайти значення многочлена* $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2x + 3$ *від матриці* A, *якщо* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Розв'язування. Знайдемо степені матриці A:

$$A^2=\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-8\\8&5\end{pmatrix},$$
$$A^3=\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&-8\\8&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-19&-18\\18&-3\end{pmatrix},$$
$$A^4=\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-19&-18\\18&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-55&-12\\16&-45\end{pmatrix}.$$

Тоді $f\left(A\right)=3\begin{pmatrix}-55&-12\\16&-45\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-19&-18\\18&-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$

$$f(A)=\begin{pmatrix}-236&-112\\124&-138\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f\left(A\right)=\begin{pmatrix}-236&-112\\124&-138\end{pmatrix}.$

□

Задача 24. *Знайти* $f\left(\mathrm{A}\right)$, *якщо* $f\left(x\right)=3x^5+2x^4-x^3+5x^2+8x+3$ *і* $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$

Розв'язування. Знайдемо степені матриці A:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$
$$A^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$
$$A^4=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$
$$A^5=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Тоді $f(A) = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} +$

$$+8\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f(A) = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 7 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$.

□

Задача 25. *Розв'язати рівняння:* $\begin{vmatrix} 3(x^2-1) & 2(x-1) \\ 4+x & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 - 9x - 5.$

Розв'язування. Маємо $\begin{vmatrix} 3(x^2-1) & 2(x-1) \\ 4+x & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 - 9x - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x^2-1)\cdot 1 - 2(x-1)\cdot(4+x) = 2x^2 - 9x - 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(3x+3-2(x+4)) = (x-5)(2x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-5) = (x-5)(2x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)(2x+1-x+1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)(x+2) = 0.$

Отже, $x = 5, x = -2$.

Відповідь: $x = 5, x = -2$. □

Задача 26. *Розв'язати нерівність:* $\begin{vmatrix} 2x+3 & -3x \\ 3-x & x \end{vmatrix} > 0.$

Розв'язування. $\begin{vmatrix} 2x+3 & -3x \\ 3-x & x \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow x\cdot(2x+3) + 3x\cdot(3-x) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 9x - 3x^2 > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 12x > 0 \Leftrightarrow -x(x-12) > 0.$

Отже, $x \in (0; 12)$.

Відповідь: $x \in (0; 12)$. □

Задача 27. *Розв'язати нерівність:* $\begin{vmatrix} 3x & 2x+1 \\ 4 & 5-x \end{vmatrix} < 0.$

Розв'язування. $\begin{vmatrix} 3x & 2x+1 \\ 4 & 5-x \end{vmatrix} < 0 \Leftrightarrow 3x\cdot(5-x) - 4\cdot(2x+1) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 7x - 4 < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(3x-4) > 0.$

Отже, $x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$. $\square$

Задача 28. *Розв'язати нерівність:* $\begin{vmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 4 & 2x+1 \end{vmatrix} \geq 0$.

Розв'язування. $\begin{vmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 4 & 2x+1 \end{vmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1) \cdot (2x+1) - 4 \cdot (x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)\,(2x+1-4(x-1)) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(-2x+5) \geq 0$.

Отже, $x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$.

Відповідь: $x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right]$. $\square$

Задача 29. *Розв'язати нерівність:* $\begin{vmatrix} 3 & x+2 \\ 2x+3 & x^2-4 \end{vmatrix} \leq 2(x-3)$.

Розв'язування. $\begin{vmatrix} 3 & x+2 \\ 2x+3 & x^2-4 \end{vmatrix} \leq 2(x-9) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 \cdot (x^2-4) - (x+2) \cdot (2x+3) \leq 2(x-9) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)\,(3\,(x-2) - (2x+3)) \leq 2(x-9) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-9) \leq 2(x-9) \Leftrightarrow (x-9)(x+2-2) \leq 0$.

Маємо, $x \in [0; 9]$.

Відповідь: $x \in [0; 9]$. $\square$

Задача 30. *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} y + 3z = -1, \\ 2x + 3y + 5z = 3, \\ 3x + 5y + 7z = 6. \end{cases}$

Розв'язування. Розв'яжемо дану систему, використовуючи формули Крамера.

Випишемо розширену матрицю системи рівнянь: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \end{array}\right)$.

Обчислимо визначник матриці коефіцієнтів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 5 & -8 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -8 \end{vmatrix} = 4.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок. Знайдемо Δ_x, Δ_y, Δ_z, підставляючи замість стовпця відповідних коефіцієнтів стовпчик вільних членів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 14 \\ 6 & 11 & 25 \end{vmatrix} = (-1)^2 (-1) \begin{vmatrix} 6 & 14 \\ 11 & 25 \end{vmatrix} = 4.$$

Тоді $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = 1.$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 14 \\ 3 & 6 & 25 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 25 \end{vmatrix} = 8.$$

Тоді $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = 2.$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 11 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = -4.$$

Тоді $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = -1.$

Відповідь: $x = 1,\ y = 2,\ z = -1.$ □

Задача 31. *Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Ґауса, матричним методом та за допомогою формул Крамера:* $\begin{cases} 3x - 3y + 2z = -1, \\ x - 2y + 3z = 7, \\ x + 4y - 4z = -9. \end{cases}$

Розв'язування. Випишемо розширену матрицю системи рівнянь: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & -4 & -9 \end{array}\right).$

Розв'яжемо дану систему методом Ґауса. Поміняємо місцями перший та другий рядки матриці. Елементарними перетвореннями зведемо дану матрицю до трикутного вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 3 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -4 & -9 \end{array}\right) \xrightarrow[I\cdot(-1)+III\to III]{I\cdot(-3)+II\to II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -7 & -22 \\ 0 & 6 & -7 & -16 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{II\cdot(-2)+III\to III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -7 & -22 \\ 0 & 0 & 7 & 28 \end{array}\right) \xrightarrow[II+III\to II]{III:7\to III}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \xrightarrow[II:3\cdot 2+I\to I]{III\cdot(-3)+I\to I} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Маємо: $x=-1,\ y=2,\ z=4$.

Позначимо $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -4 \end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Обчислимо визначник матриці коефіцієнтів A:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta=-12-21+12=-21.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то матриця A невироджена, систему можна розв'язати матричним методом.

$$A\cdot X=B\ \Rightarrow A^{-1}\cdot AX=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B.$$

Знайдемо алгебричні доповнення елементів матриці A:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=-4,$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=7,$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=6,$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}=-4,$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=-14,$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-15,$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=-5,$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-7,$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3.$

Тоді $A^{-1}=\dfrac{1}{-21}\begin{pmatrix} -4 & -4 & -5 \\ 7 & -14 & -7 \\ 6 & -15 & -3 \end{pmatrix}$

і

$$X=\frac{1}{-21}\begin{pmatrix} -4 & -4 & -5 \\ 7 & -14 & -7 \\ 6 & -15 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{-21}\begin{pmatrix} 4-28+45 \\ -7-98+63 \\ -6-105+27 \end{pmatrix}=\frac{1}{-21}\begin{pmatrix} 21 \\ -42 \\ -84 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Маємо: $x=-1,\ y=2,\ z=4.$

Розв'яжемо дану систему, використовуючи формули Крамера. Випишемо розширену матрицю системи рівнянь: $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & -4 & -9 \end{array}\right)$. Обчислимо визначник матриці коефіцієнтів:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta=-12-21+12=-21.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок. Знайдемо Δ_x, Δ_y, Δ_z, підставляючи замість стовпця відповідних коефіцієнтів стовпчик вільних членів:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 7 & -2 & 3 \\ -9 & 4 & -4 \end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -9 & -4 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -9 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x=4-3+20=21.$$

Тоді $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{21}{-21}=-1.$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 1 & -9 & -4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -9 & -4 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -9 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y=-3-7-32=-42.$$

Тоді $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-42}{-21}=2.$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & -9 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -9 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = -30 - 48 - 6 = -84.$$

Тоді $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta} = \dfrac{-84}{-21} = 4.$

Відповідь: $x = -1,\ y = 2,\ z = 4.$ $\square$

Задача 32. *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$

Розв'язування. Елементарними перетвореннями зведемо матрицю коефіцієнтів $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right)$ до трапецевидного вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[I\cdot(-4)+III\to III]{I\cdot(-3)+II\to II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{II\cdot(-1)+III\to III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Система несумісна, оскільки ранг матриці коефіцієнтів дорівнює 2, а ранг розширеної матриці дорівнює 3.

Відповідь: система несумісна (розв'язків не має). $\square$

Задача 33. *Розв'язати систему лінійних рівнянь* $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$

Розв'язування. Розв'яжемо дану систему методом Ґауса. Випишемо розширену матрицю системи рівнянь: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & -4 \end{array}\right)$. Поміняємо місцями перший та другий рядки матриці. Елементарними перетвореннями зведемо дану матрицю до трикутного вигляду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{I\cdot(-3)+III\to III \\ I+IV\to IV}]{I\cdot(-2)+II\to II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & -6 & -6 \\ 0 & 8 & -5 & -11 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[\substack{IV\cdot 5+II\to III \\ IV\cdot 8+III\to IV}]{IV\to II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -13 & 4 & -21 \\ 0 & 0 & -21 & 5 & -31 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III\cdot(-21)+IV\cdot 13\to IV \\ I+IV\to IV}]{III\to III}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -13 & 4 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & -19 & 38 \end{array}\right)$$

З останнього рядка матриці маємо $-19x_4 = 38$, тобто $x_4 = -2$.

З третього рядка останньої матриці отримаємо $-13x_3+4x_4 = -21$, тому $x_3 = 1$.

Другий рядок матриці запишемо як $-x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3$, звідки отримаємо $x_2 = -3$.

Відновлюємо перший рядок матриці $x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1$, тому $x_1 = 2$.

Таким чином, маємо: $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 1, x_4 = -2$.

Розв'яжемо дану систему, використовуючи формули Крамера.

Випишемо розширену матрицю системи рівнянь: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & -4 \end{array}\right)$.

Обчислимо визначник матриці коефіцієнтів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = (-1)^{4+1} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 5 & -11 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -13 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -21 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\Delta = (-1)^{2+1}(-1) \begin{vmatrix} -13 & 4 \\ -21 & 5 \end{vmatrix} = -13 \cdot 5 + 4 \cdot 21 = 19.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок. Знайдемо $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}, \Delta_{x_4}$, підставляючи замість стовпця відповідних коефіцієнтів стовпчик вільних членів:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 3 & 18 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -6 & 2 & 17 \\ 0 & -7 & 1 & 14 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_1} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} -7 & 3 & 18 \\ -6 & 2 & 17 \\ -7 & 1 & 14 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 14 & 0 & -24 \\ 8 & 0 & -11 \\ -7 & 1 & 14 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_1} = -1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 14 & -24 \\ 8 & -11 \end{vmatrix} = (-154 + 192) = 38.$$

Тоді $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{38}{19} = 2.$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \\ -1 & -4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -3 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -5 & -11 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -3 & -6 \\ -7 & -5 & -11 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = -1 \left(-3 \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -11 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-2) \begin{vmatrix} -6 & -6 \\ -7 & -11 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 2 \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} \right),$$

$$\Delta_{x_2} = -1 \cdot (-3 \cdot 3 + 2 \cdot 24 + 2 \cdot 9) = -57.$$

Тоді $x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \dfrac{-57}{19} = -3.$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & -16 & -5 \\ -1 & 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -12 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 5 & -16 & -5 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_3} = 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -16 & -5 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-12) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -16 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_3} = 3 \cdot 47 + 12 \cdot (-5) - 2 \cdot 31 = 19.$$

Тоді $x_3 = \dfrac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \dfrac{19}{19} = 1.$

$$\Delta_{x_4} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -7 & -12 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -11 & -16 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_4} = (-1)^{4+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 & -12 \\ -1 & -2 & -3 \\ 5 & -11 & -16 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_{x_4} = 3 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -11 & -16 \end{vmatrix} - 1 \cdot (-7) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -16 \end{vmatrix} - 12 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -11 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_4} = 3 \cdot (-1) + 7 \cdot 31 - 12 \cdot 21 = -38.$$

Тоді $x_4 = \dfrac{\Delta_{x_4}}{\Delta} = \dfrac{-38}{19} = -2.$
Відповідь: $x_1 = 2, x_2 = -3, x_3 = 1, x_4 = -2.$

$\square$

Задача 34. *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10, \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

Розв'язування. Розв'яжемо дану систему методом Ґауса. Випишемо розширену матрицю системи рівнянь: $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 2 & 1 & 16 \\ 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 10 \\ 4 & -3 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right)$. Поміняємо місцями перший та другій рядки матриці. Виконаємо прямий хід методу Ґауса. Елементарними перетвореннями зведемо дану матрицю до трикутного вигляду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 16 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 10 \\ 4 & -3 & 4 & 6 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{I \cdot (-2) + III \to III \\ I \cdot (-4) + IV \to IV}]{I \cdot (-3) + II \to II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & -17 & -1 & -2 & -53 \\ 0 & -13 & 1 & 3 & -36 \\ 0 & -31 & 0 & 2 & -91 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{II + III \to III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & -17 & -1 & -2 & -53 \\ 0 & -30 & 0 & 1 & -89 \\ 0 & -31 & 0 & 2 & -91 \end{array}\right) \xrightarrow{III - IV \to III}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & -17 & -1 & -2 & -53 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -31 & 0 & 2 & -91 \end{array}\right) \to \xrightarrow[III\cdot 31+IV\to IV]{III\cdot 17+II\to II}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & -1 & -19 & -19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -29 & -29 \end{array}\right) \xrightarrow{IV\cdot\frac{-1}{29}\to IV} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -19 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Прямий хід методу Ґауса завершено. Виконаємо зворотній хід. За допомогою четвертого рядка отримаємо нулі у четвертому стовпчику:

$$\xrightarrow[\substack{IV\cdot(1)+II\to II \\ IV\cdot(-1)+I\to I}]{IV\cdot(19)+III\to III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 1 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{III+I\to I}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II\cdot(-7)+I\to I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отже, $x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1.$

Відповідь:$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1.$ □

Задача 35. *Дослідити та розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв'язування. Запишемо матрицю коефіцієнтів $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right)$ або

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[I\cdot(-4)+III\to II]{I\cdot(-2)+II\to II} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{II\cdot(-1)+III\to II} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & -2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{II\cdot(-6)+III\to III}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 16 & -11 \end{array}\right)$$. Ранг розширеної матриці збігається з рангом матриці коефіцієнтів, отже система сумісна за теоремою Кронекера–Капеллі. Ранг дорівнює 3, а кількість змінних 4, тому система має безліч розв'язків. За базові зміни візьмемо $x_1,\ x_2,\ x_3$. Виразимо базові змінні через вільну. Нехай $x_4 = A$, тоді

$$x_3 = \frac{1}{5}\left(11 + 16A\right), \qquad x_2 = 3 + 3A - \frac{1}{5}\left(11 + 16A\right) = \frac{1}{5}\left(4 - A\right),$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\left(1 - 4A + \frac{3}{5}\left(11 + 16A\right) - \frac{2}{5}\left(4 - A\right)\right) = \frac{1}{15}\left(30 + 30A\right) = 2 + 2A.$$

Загальний розв'язок має вигляд: $\begin{pmatrix} 2+2A \\ \frac{1}{5}(4-A) \\ \frac{1}{5}(11+16A) \\ A \end{pmatrix}$, $A \in R$, або

$\begin{pmatrix} 10+10A \\ 4-A \\ 11+16A \\ 5A \end{pmatrix}$, $A \in\ R$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 10+10A \\ 4-A \\ 11+16A \\ 5A \end{pmatrix}$, $A \in\ R$. □

Задача 36. *Розв'язати систему рівнянь* $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$.

Розв'язування. Перетворимо матрицю коефіцієнтів:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[I\cdot(-2)+III\to III]{I\cdot(-1)+II\to II} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 11 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{II+III\to III} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 14 & 1 \end{array}\right).$$

Система сумісна (ранг матриці коефіцієнтів дорівнює рангу розширеної матриці), невизначена (кількість змінних більша за ранг). Загальний розв'язок знайдемо як суму загального розв'язку відповідної однорідної системи рівнянь та часткового розв'язку неоднорідної системи рівнянь. Матриця коефіцієнтів однорідної системи має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 14 \end{pmatrix}$. Ранг матриці 3, дефект матриці 2 (2 вільні змінні). За базові змінні візьмемо невідомі x_2, x_3, x_4. Знайдемо вираз базових змінних через вільні x_1, x_5. Оскільки у нас дві вільні змінні, то фундаментальна система розв'язків має два вектора. Нехай $x_1 = 1,\ x_5 = 0$, тоді $x_4 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 = -1$. Нехай тепер $x_1 = 0,\ x_5 = 1$, тоді
$x_4 = -\dfrac{14}{10},\ x_3 = 3 + 5\left(-\dfrac{14}{10}\right) = -4,\ x_2 = 4 + 3\left(-\dfrac{14}{10}\right) = \dfrac{-1}{5}$.

Тоді загальний розв'язок має вигляд $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot A + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -20 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot B, \quad A, B \in\ R.$

Тепер знайдемо частковий розв'язок неоднорідної системи.
Нехай $x_1 = 0,\ x_5 = 0$, тоді $x_4 = \dfrac{1}{10} = 0.1,\ x_3 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} = 1.5$,
$x_2 = \dfrac{3}{10} = 0.3$, і частковим розв'язком буде вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 1.5 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot A + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -20 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot B + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3 \\ 1.5 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A, B \in R.$ $\square$

Задача 37. *Дослідити та розв'язати систему рівнянь*
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язування. Оскільки кількість змінних системи більша за кількість рівнянь, то дана однорідна система має нетривіальні розв'язки. Матрицю коефіцієнтів

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$ даної системи елементарними перетвореннями зведемо до трапецевидного вигляду:

$$\xrightarrow[I\cdot(-3)+III\to III]{I\cdot(-2)+II\to II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{III:2\to III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{II+III\to II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II\cdot 3+III\to III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow[III\cdot(-4)+I\to I]{III\cdot(-1)+II\to II} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{II\cdot(-3)+I\to I} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ранг матриці дорівнює 3. За базисний візьмемо мінор, розташований у 1–3 стовпцях. Тоді базовими змінними будуть $x_1,\ x_2,\ x_3$. Виразимо базові змінні через вільну: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$. Нехай $x_4 = A$. Тоді розв'язком системи є вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ A \\ -A \\ A \end{pmatrix}$ або $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A,\ A \in\ R.$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} A$, де $A \in\ R.$ □

Задача 38. *Дано вектори* $\overrightarrow{a} = (-2;3;-1),\ \overrightarrow{b} = (-1;4;2),\ \overrightarrow{c} = (1;2;1)$. *Довести, що вони утворюють базис. Знайти розклад вектора* $\overrightarrow{d} = (2;8;9)$ *за векторами* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

Розв'язування. Вектори утворюють базис тоді й лише тоді, якщо вони лінійно незалежні. Для трьох векторів достатньо, щоб вони були некомпланарними, тобто мішаний добуток повинен бути відмінний від нуля. Знайдемо мішаний добуток: $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Обчислимо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 9 + 7 = 16.$$

Оскільки визначник не дорівнює нулю, то вектори лінійно незалежні, тобто утворюють базис. Знайдемо розклад вектора $\overrightarrow{d}$ за векторами $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$. Нехай $\overrightarrow{d} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c}$, тоді

$\overrightarrow{d} = (2; 8; 9) = (-2x; 3x; -x) + (-y; 4y; 2y) + (z; 2z; z)$,

$\overrightarrow{d} = (-2x - y + z; 3x + 4y + 2z; -x + 2y + z)$.

Отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} -2x - y + z = 2, \\ 3x + 4y + 2z = 8, \\ -x + 2y + z = 9. \end{cases}$

Розв'яжемо дану систему методом Ґауса. Випишемо розширену матрицю системи рівнянь: $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right)$.

Поміняємо місцями перший та третій рядки матриці. Елементарними перетвореннями зведемо дану матрицю до трикутного вигляду.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 9 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[I \cdot (-2) + III \to III]{I \cdot (3) + II \to II} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 10 & 5 & 35 \\ 0 & -5 & -1 & -16 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{II + 2 \cdot III \to III} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 10 & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[III : 3 \to III]{II : 5 \to II} \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ранг матриці коефіцієнтів дорівнює рангу розщиренної матриці та дорівнює кількості невідомих, тому система має єдиний розв'язок.

За допомогою останього рядка отримаємо значення z: $z = 1$.

Після відновлення другого рядка $2y + z = 7$ отримаємо $y = 3$.

З першого рядка $-x + 2y + z = 9$ маємо $x = -2$.

Таким чином, $\overrightarrow{d} = -2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

Відповідь: $\overrightarrow{d} = -2\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$. □

Задача 39. *Для заданих векторів* $\overrightarrow{a} = (1; -2; 4)$, $\overrightarrow{b} = (1; 3; -2)$, $\overrightarrow{c} = (2; 4; -3)$ *знайти:*

(a) *напрямні косинуси та довжину вектора* $\overrightarrow{a}$;

(b) *скалярний добуток векторів* $\left(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(3\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\right)$;

(c) *векторний добуток* $\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)\times\left(2\overrightarrow{c}+3\overrightarrow{a}\right)$;

(d) *ортогональну проекцію вектора* $\left(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)$ *на вектор* $\left(\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right)$.

Розв'язування. (a) Знайдемо напрямні косинуси та довжину вектора $\overrightarrow{a}=(1;-2;4)$:

$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+4^2}=\sqrt{21}$,

$\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\overrightarrow{a}|}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}$,

$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\overrightarrow{a}|}=\dfrac{-2}{\sqrt{21}}$,

$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\overrightarrow{a}|}=\dfrac{3}{\sqrt{21}}$.

(b) Знайдемо скалярний добуток векторів $\left(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(3\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\right)$.

Для цього обчислимо координати векторів-множників:

$2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}=2\,(1;-2;4)+3\,(1;3;-2)=(5;5;2)$;

$3\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}=3\,(2;4;-3)-(1;-2;4)=(5;14;-13)$.

Користуємося формулою для знаходження скалярного добутку в координатному вигляді:

$\left(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(3\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\right)=(5;5;2)\cdot(5;14;-13)$

$\left(2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(3\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\right)=5\cdot5+5\cdot14+2\cdot(-13)=69.$

(c) Знайдемо векторний добуток $\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)\times\left(2\overrightarrow{c}+3\overrightarrow{a}\right)$.

Обчислюємо координати векторів:

$\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=(1;-2;4)-2\,(1;3;-2)=(-1;-8;8)$,

$2\overrightarrow{c}+3\overrightarrow{a}=2\,(2;4;-3)+3\,(1;-2;4)=(7;2;6)$.

Використаємо координатну форму векторного добутку:

$$\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)\times\left(2\overrightarrow{c}+3\overrightarrow{a}\right)=(-1;-8;8)\times(7;2;6)=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i}&\overrightarrow{j}&\overrightarrow{k}\\-1&-8&8\\7&2&6\end{vmatrix},$$

або

$$\left(\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)\times\left(2\overrightarrow{c}+3\overrightarrow{a}\right)=-64\overrightarrow{i}+62\overrightarrow{j}+54\overrightarrow{k}=\begin{pmatrix}-64; & 62; & 54\end{pmatrix}.$$

(d) Знайдемо проекцію вектора $\left(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)$ на вектор $\left(\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right)$.

Спочатку обчислюємо координати векторів:

$$3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}=3\,(1;-2;4)-2\,(1;3;-2)=(1;-12;16),$$
$$\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}=(2;4;-3)-2\,(1;3;-2)=(0;-2;1),$$

$$\text{пр}_{\left(\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right)}\left(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)=\frac{\left(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right)}{\left|\left(\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right)\right|},$$

$$\left(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right)=(1;-12;16)\cdot(0;-2;1),$$

$$\left(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right)=1\cdot 0-12\cdot(-2)+16\cdot 1=40,$$

$$\left|\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{0^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{5},$$

$$\text{пр}_{\left(\overrightarrow{c}-2\overrightarrow{b}\right)}\left(3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}\right)=\frac{40}{\sqrt{5}}.$$

□

Задача 40. *Дано три точки* $A(1;2), B(0;-3), C(-1;4)$. *Знайти:*

(a) *площу трикутника* ABC*;*

(b) *рівняння та довжину висоти, проведену з вершини* A*;*

(c) *внутрішні кути трикутника;*

(d) *кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини* C*;*

(e) *рівняння та довжину середньої лінії паралельної стороні* AC .

Зробити відповідні креслення.

Розв'язування. (a) Знайдемо довжину висоти AK, як відстань від точки A до прямої BC. Для цього запишемо рівняння прямої BC:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-0}{-1-0}=\frac{y+3}{4+3}\Rightarrow\frac{x}{-1}=\frac{y+3}{7},$$

$$7x=-y-3$$

$$7x+y+3=0.$$

Тоді, $|AK|=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{7\cdot 1+2+3}{\sqrt{7^2+1^1}}=\dfrac{12}{\sqrt{50}}.$

Оскільки $\overrightarrow{AK}\perp\overrightarrow{BC}$, то рівняння висоти AK запишемо у вигляді:

$$A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)=0,$$

де вектор нормалі $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{BC}=(-1;7)$.

Тоді,

$$-1\left(x-1\right)+7\left(y-2\right)=0,$$

$$-1x+1+7y-14=0,$$

$$-1x+7y-13=0,$$

$$x-7y+13=0 \text{ – рівняння висоти } AK.$$

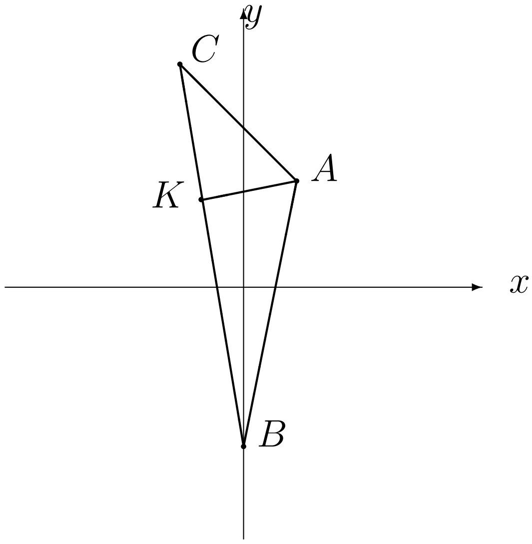

*рис.*1

(b) Знайдемо площу трикутника ABC, використавши формулу:

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AK}\right|.$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}.$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{50} \cdot \frac{12}{\sqrt{50}} = 6. \text{ (кв.од.)}$$

(c) Знайдемо внутрішні кути трикутника ABC. Для цього обчислимо:

$$\overrightarrow{AB} = (0-1; -3-2) = (-1; -5)\,,$$

$$|AB| = \sqrt{(-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26},$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1-1; 4-2) = (-2; 2)\,,$$

$$|AC| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8},$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1-0; 4-(-3)) = (-1; 7)\,,$$

$$|BC| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}.$$

Тоді,

$$cos\angle A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-1)\cdot(-2) + (-5)\cdot 2}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{8}} = \frac{-8}{\sqrt{26}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{-4}{\sqrt{52}},$$

$$\angle A = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{52}}\right) = \pi - \arccos\frac{4}{\sqrt{52}}.$$

$$cos\angle B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{1\cdot(-1) + 5\cdot 7}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{50}} = \frac{34}{\sqrt{26}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{34}{10\sqrt{13}} =$$

$$\frac{17}{5\sqrt{13}},$$

$$\angle B = \arccos\frac{17}{5\sqrt{13}}.$$

$$cos\angle C = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{2\cdot 1+(-2)\cdot(-7)}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{50}} = \frac{16}{2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{4}{5},$$

$$\angle C = \arccos\frac{4}{5}.$$

(d) Знайдемо кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини C.

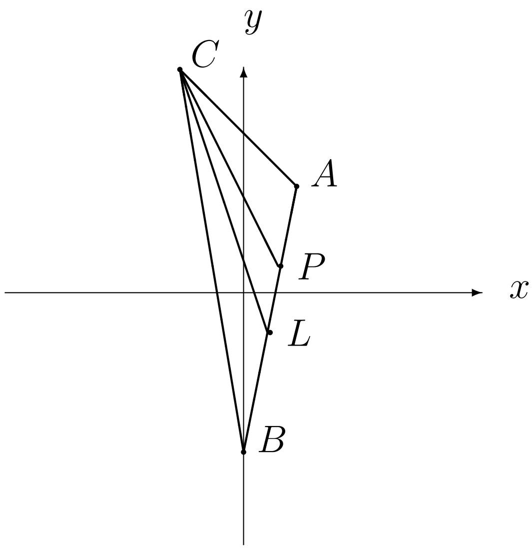

*рис.*2

Обчислимо координати точки L– середини відрізка AB:

$$x_L = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \qquad y_L = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{2-3}{2} = \frac{-1}{2}.$$

Знайдемо напрямок прямої CL, що містить медіану трикутника: $A(1;2), B(0;-3), C(-1;4)$

$$\overrightarrow{CL} = \left(\frac{1}{2}+1;\frac{-1}{2}-4\right) = \left(\frac{3}{2};\frac{-9}{2}\right),$$

Для з'ясування напрямку бісектриси CP знайдемо вектори $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$:
$\overrightarrow{CA} = (1-(-1);2-4) = (2;-2)$, $\overrightarrow{CB} = (0-(-1);-3-4) = (1;-7)$.

Знайдемо довжини векторів:

$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{1^2+(-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Пронормуємо вектори

$$\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}:$$

$$\overrightarrow{CA_0} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}};\frac{-2}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$\overrightarrow{CB_0} = \frac{\overrightarrow{CA}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|} = \left(\frac{1}{5\sqrt{2}};\frac{-7}{5\sqrt{2}}\right).$$

Напрямок бісектриси CP буде співпадати з напрямком суми нормованих векторів:

$$\overrightarrow{s}=\overrightarrow{CA}_0+\overrightarrow{CB}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{5\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{-7}{5\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{6}{5\sqrt{2}};\frac{-12}{5\sqrt{2}}\right),$$

$$|\overrightarrow{s}|=\sqrt{\left(\frac{6}{5\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{-12}{5\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{6}{5\sqrt{2}}\sqrt{1+4}=\frac{6}{\sqrt{10}}.$$

Оскільки $\left|\overrightarrow{CL}\right|=\sqrt{(\frac{3}{2})^2+(\frac{-9}{2})^2}=\sqrt{\frac{90}{4}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$, то

$$cos\angle LCP=\frac{\overrightarrow{CL}\cdot\overrightarrow{s}}{\left|\overrightarrow{CL}\right|\cdot|\overrightarrow{s}|}=\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5\sqrt{2}}+\frac{-9}{2}\cdot\frac{-12}{5\sqrt{2}}}{\frac{3\sqrt{10}}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{10}}}=\frac{126}{10\cdot 9\sqrt{2}}=\frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

Оскільки кут між прямими – це найменший кут, тому

$$\angle LCP=\arccos\frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

(e) Знайдемо рівняння середньої лінії, паралельної стороні AC, та її довжину.

Прораховуємо координати середини відрізків BC і AB:

$$x_L=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2},$$
$$y_L=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2-3}{2}=\frac{-1}{2},$$
$$L\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),$$
$$x_M=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{0-1}{2}=\frac{-1}{2},$$
$$y_M=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2},$$
$$M\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Тоді довжина середньої лінії LM буде дорівнювати:

$$\left|\overrightarrow{LM}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{2}.$$

Запишемо рівняння середньої лінії LM:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{y+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{x-\frac{1}{2}}{-1}=\frac{y+\frac{1}{2}}{1}\Rightarrow x+y=0.$$

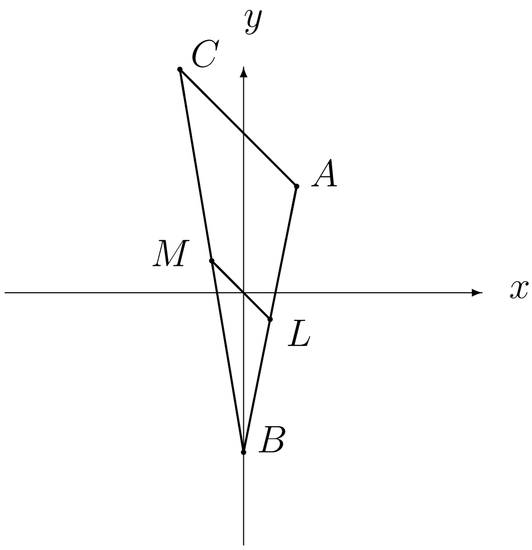

*рис.*3

$\square$

Задача 41. *Дано координати точок* $A(2;1;-3), B(1;0;-2), C(-1;3;1), S(0;5;2)$. *Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:*

(a) *об'єм тетраєдра* $ABCS$;

(b) *площу основи* ABC;

(c) *довжину висоти* S *піраміди, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки до площини та формулу об'єма піраміди;*

(d) *кут нахилу ребра* AS *до площини* ABC;

(e) *двогранний кут при ребрі* AB;

(f) *плоский кут* ASB *при вершині* S;

(g) *точку перетину висоти піраміди з основою* ABC.

Розв'язування. Доведемо, що точки A, B, C, S не лежать в одній площині. Це рівносильно умові, що вектори $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ – некомпланарні. Знайдемо ці вектори:

$\overrightarrow{SA} = (2-0; 1-5; -3-2) = (2; -4; -5)$,

$\overrightarrow{SB} = (1-0; 0-5; -2-2) = (1; -5; -4)$,

$\overrightarrow{SC} = (-1-0; 3-5; 1-2) = (-1; -2; -1)$,

і обчислимо мішаний добуток

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ некомпланарні, що й доводить те що точки A, B, C, S не лежать в одній площині.

Знайдемо об'єм тетраедра $ABCS$ за формулою $V = \dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC}\right|$.

Тоді, $V = \dfrac{1}{6} \cdot 9 = \dfrac{3}{2}$(куб.од.)

(b) Для знаходження площі основи ABC обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB} = (-1; -1; 1)$ і $\overrightarrow{AC} = (-3; 2; 4)$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \overrightarrow{k} =$$

$= -6\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 5\overrightarrow{k} = (-6; 1; -5)$.

Тоді, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 1^2 + (-5)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{36 + 1 + 25}$,

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{62}}{2}$ (кв.од.)

(c) Знайдемо висоту піраміди, використавши формулу $V = \dfrac{1}{3}S_{осн} \cdot H$.

Звідси, $H = \dfrac{3V}{S_{осн}}$, тобто $H = \dfrac{3 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{62}}{2}} = \dfrac{9}{\sqrt{62}} = \dfrac{9\sqrt{62}}{62}$.

Тепер знайдемо висоту, як відстань від точки S до площини ABC.

Для цього запишемо рівняння площини ABC за формулою

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Підставимо у визначник координати точок A, B, C і одержимо:

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z + 3 \\ 1 - 2 & 0 - 1 & -2 + 3 \\ -1 - 2 & 3 - 1 & 1 + 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z + 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$$(x - 2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (y - 1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + (z + 3)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-6(x - 2) + (y - 1) - 5(z + 3) = 0,$$

$-6x + y - 5z - 4 = 0$– рівняння площини ABC.

Тоді, $H = \left|\overrightarrow{SO}\right| = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$,

$H = \dfrac{|-6 \cdot 0 + 1 \cdot 5 - 5 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{(-6)^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{62}} = \dfrac{9\sqrt{62}}{62}$.

(d) Знайдемо кут між ребром $AS = (-2; 4; 5)$ і площиною ABC, використавши формулу:

$\sin\varphi = \dfrac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$,
де $\overrightarrow{n} = (A;B;C)$ – вектор нормалі площини ABC, $\overrightarrow{n} = (-6;1;-5)$,
$\overrightarrow{a} = (l;m;n)$ – координати вектора $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{a} = (-2;4;5)$.

Тоді,
$\sin\varphi = \dfrac{(-6)\cdot(-2)+1\cdot 4+(-5)\cdot 5}{\sqrt{(-6)^2+1^2+(-5)^2}\sqrt{(-2)^2+4^2+5^2}} = \dfrac{12+4-25}{\sqrt{62}\sqrt{45}} = -\dfrac{3}{\sqrt{310}}$,
$\varphi = \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{310}}$.

(e) Знайдемо двогранний кут при ребрі AB. Це кут між площинами (ABC) і (ABS), тобто кут між їх нормальними векторами. Нормальний вектор площини (ABC) візьмемо з рівняння даної площини (пункт (c)) $\overrightarrow{n_1} = (-6;1;-5)$, а нормальний вектор $\overrightarrow{n_2}$ площини (ABS) обчислюємо за допомогою векторного добутку:

$$\overrightarrow{n_2} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AS} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\overrightarrow{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\overrightarrow{k} =$$

$$= -9\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k} = (-9;3;-6).$$

Тоді,
$\cos\angle(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}) = \dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \dfrac{(-6)\cdot(-9)+1\cdot 3+(-5)\cdot(-6)}{\sqrt{(-6)^2+1^2+(-5)^2}\sqrt{(-9)^2+3^2+(-6)^2}} =$
$\dfrac{54+3+30}{\sqrt{62}\sqrt{126}} =$
$= \dfrac{87}{\sqrt{62\cdot 126}}$.

Отже, $\widehat{(ABC),(ABS)} = \arccos\dfrac{87}{\sqrt{62\cdot 126}}$.

(f) Знайдемо плоский кут ASB при вершині S:
$\cos\angle ASB = \dfrac{\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}}{\left|\overrightarrow{SA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\right|} = \dfrac{2\cdot 1+(-4)\cdot(-5)+(-5)\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-4)^2+(-5)^2}\sqrt{1^2+(-5)^2+(-4)^2}}$,
$\cos\angle ASB = \dfrac{2+20+20}{\sqrt{45}\sqrt{42}} = \dfrac{42}{\sqrt{45\cdot 42}} = \sqrt{\dfrac{14}{15}}$.
Тоді, $\angle ASB = \arccos\sqrt{\frac{14}{15}}$.

(g) Знайдемо точку перетину висоти піраміди з основою (ABC). Для цього запишемо рівняння висоти SO у канонічному вигляді:
$\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$,
де напрямний вектор висоти $\overrightarrow{a} = (l;m;n) = (-6;1;-5)$,

точка, через яку проходить пряма $(x_0; y_0; z_0) = (0; 5; 2)$.

Одержимо, $\dfrac{x-0}{-6} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z-2}{-5}$ – канонічне рівняння висоти SO.

Знайдемо точку перетину висоти SO з площиною (ABC) з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x-0}{-6} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z-2}{-5} = t \\ -6x + y - 5z - 4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -6t \\ y = t + 5 \\ z = -5t + 2 \\ -6x + y - 5z - 4 = 0, \end{cases}$$

$$-6(-6t) + (t+5) - 5(-5t+2) - 4 = 0,$$

$$36t + t + 5 + 25t - 10 - 4 = 0,$$

$$62t - 9 = 0,$$

$$t = \frac{9}{62},$$

$$\begin{cases} x = -6 \cdot \dfrac{9}{62} = \dfrac{-27}{31} \\ y = \dfrac{9}{62} + 5 = 5\dfrac{9}{62} \\ z = -5 \cdot \dfrac{9}{62} + 2 = 1\dfrac{17}{62} \end{cases}$$

Отже, $O\left(\dfrac{-27}{31}; 5\dfrac{9}{62}; 1\dfrac{17}{62}\right)$.

□

Задача 42. *На площині задано криву $x^2 + y^2 - 4 = 0$. З'ясувати вид кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування.

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Це рівняння кола з центром у початку координат $(-4; 1)$ та радіусом $R = 2$.

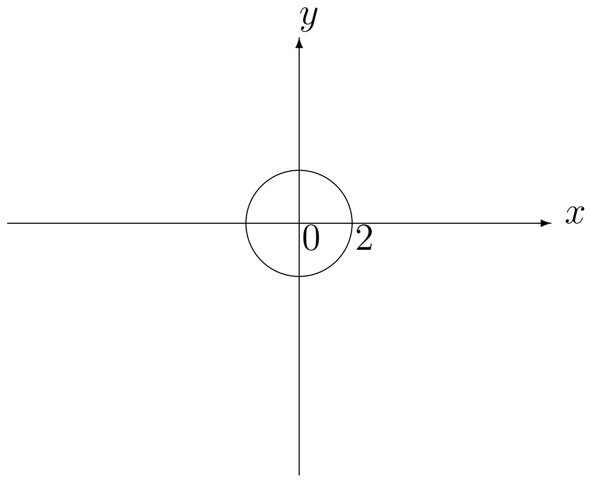

*рис.*4

□

Задача 43. *На площині задано криву* $x^2 - 4x + y^2 = 0$*. Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування. Виділяємо повний квадрат відносно змінної x:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 0.$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 2^2.$$

Це рівняння кола з центром у точці $(2;0)$ та радіусом $R = 2$.

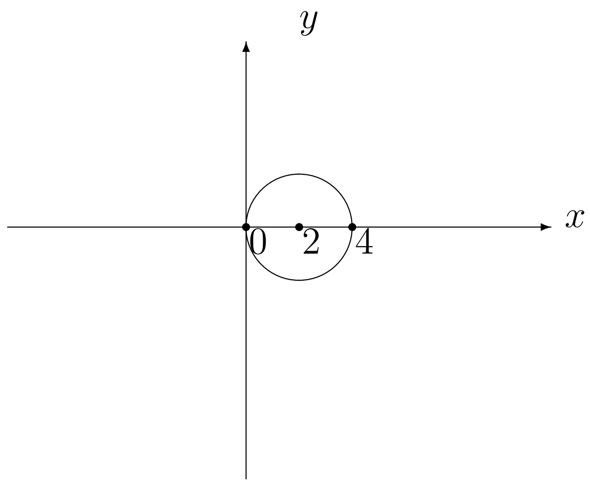

*рис.*5

□

Задача 44. *На площині задано криву $x^2 + y^2 + 4y = 0$. Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування. Виділяємо повний квадрат відносно y:

$$x^2 + y^2 + 4y + 4 - 4 = 0.$$

$$x^2 + (y + 2)^2 = 4.$$

Це рівняння кола з центром у точці $(0; -2)$ та радіусом $R = 2$.

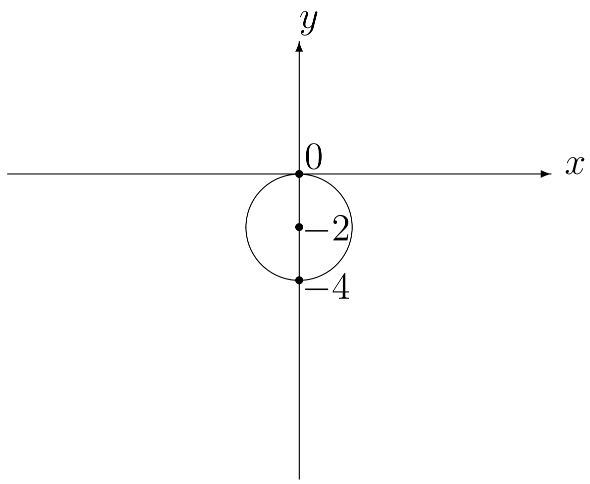

*рис.*6

□

Задача 45. *На площині задано криву $x^2 + 8x + y^2 - 2y - 32 = 0$. Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування. Виділяємо повні квадрати:

$$x^2 + 8x + y^2 - 2y - 32 = 0.$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - 4^2 + y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 - 32 = 0.$$

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 7^2.$$

Це рівняння кола з центром у точці $(-4; 1)$ та радіусом $R = 7$.

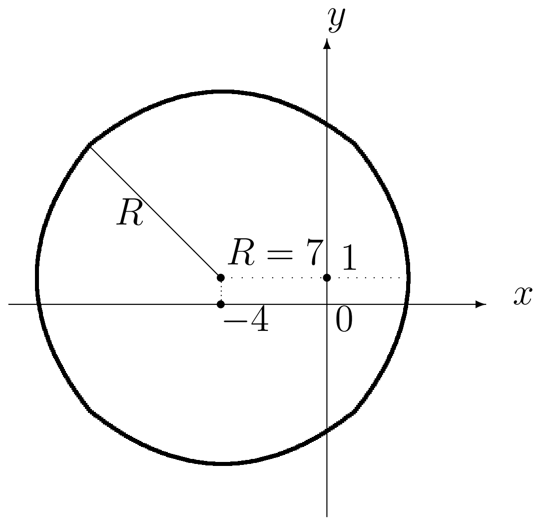

*рис.*7

□

Задача 46. *На площині задано криву* $9x^2+25y^2-225=0$. *Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування.

$$9x^2+225y^2=225.$$

$$\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1.$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Отримали рівняння еліпса. Нагадаємо, що еліпсом називається геометричне місце точок площини, для яких сумма відстаней до двох фіксованих точок F_1 та F_2 цієї площини, що називаються фокусами, є стала величина. До основних характеристик еліпса відносяться: центр симетрії еліпса, довжини піввосей, фокальний параметр, фокуси, ексцентриситет та директриси еліпса. Для канонічного рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

центр симетрії розташовано у початку координат, a та b - довжини півосей еліпса. У випадку $a>b$, a– велика піввісь симетрії, b–мала піввісь симетрії. У цьому випадку фокальний параметр $c=\sqrt{a^2-b^2}$, фокуси мають координати $F_1(-c;0)$ та $F_2(c;0)$. Ексцентриситетом еліпса називають число $\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$, що характеризує міру стиснення до вісі, що містить фокуси. Директрисами еліпса називають вертикальні прямі, що задаються рівняннями $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ або $x = \pm\frac{a^2}{c}$.

У нашому випадку $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ центр симетрії еліпса $O\,(0;0)$, піввісі $a = 5$, $b = 3$, причому $a > b$, тому фокальний параметр $c = \sqrt{5^2 - 3^2}$, $c = 4$. Фокуси еліпса лежать на вісі $y = 0$, відхиляючись від точки 0 вліво та праворуч на відстань $c = 4$, тобто $F_1(4;0)$, $F_2(-4,0)$. Ексцентриситет цього еліпса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$. Директрисами будуть прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, $x = \frac{25}{4}$, $x = -\frac{25}{4}$. Виконуємо необхідні креслення:

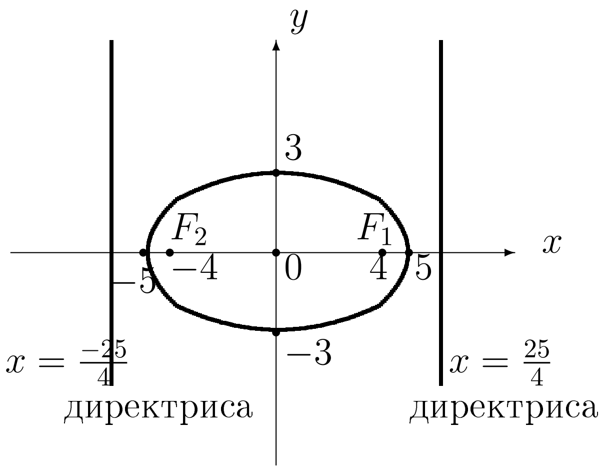

рис.8

□

Задача 47. *На площині задано криву* $169x^2 + 25y^2 - 4225 = 0$. *Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування.

$$169x^2 + 25y^2 - 4225 = 0.$$

$$169x^2 + 25y^2 = 4225.$$

$$\frac{169x^2}{4225} + \frac{25y^2}{4225} = 1.$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1.$$

Отримали рівняння еліпса. Для канонічного рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

центр симетрії розташовано у початку координат, a та b - довжини півосей еліпса. У випадку $b > a$ маємо b– велика піввісь симетрії, a–мала піввісь симетрії. Тому фокальний параметр $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, фокуси розташовані на вісі OY та мають координати $F_1(0; -c)$ та $F_2(0; c)$. Ексцентриситет такого еліпса $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{b^2}}$. Директриси еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, у випадку $b > a$ задаються рівняннями $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ або $y = \pm\dfrac{b^2}{c}$.

У нашому випадку $b > a$ маємо $b = 13$– велика піввісь симетрії, $a = 5$– мала піввісь симетрії. Фокальний параметр $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, фокуси розташовані на вісі OY та мають координати $F_1(0; 12)$ та $F_2(0; -12)$. Ексцентриситет такого еліпса $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = \dfrac{12}{13}$. Директриси еліпса задаються рівняннями $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ або $y = \pm\dfrac{169}{12}$. Виконуємо креслення:

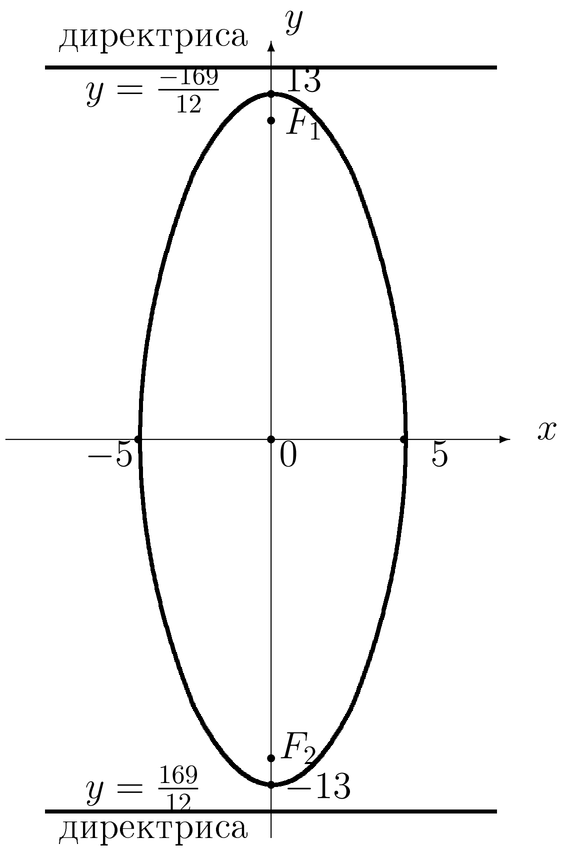

*рис.*9

□

Задача 48. *На площині задано криву* $\frac{(x-3)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$. *З'ясувати тип цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування.
$$\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y-2)^2}{64}=1.$$
Маємо рівняння еліпса з центром симетрії у точці $(x_0;y_0)$:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$
Центр симетрії еліпса знаходиться в точці $C\,(3;2)$ тому потрібно в цій точці роташувати допоміжну систему координат. У нашому випадку піввісі $a=10$, $b=8$, причому $a>b$, тому фокальний параметр $c=\sqrt{10^2-8^2}$, $c=6$. В цьому випадку фокуси еліпса лежать на прямій $y=2$, відхиляючись від точки C ліворуч та праворуч на відстань $c=6$, тобто $F_1(x_0+c;y_0)$, $F_2(x_0-c,y_0)$.Маємо $F_1(3+6;2)$, $F_2(3-6,2)\Rightarrow F_1(9;2)$, $F_2(-3,2)$. Ексцентриситет цього еліпса $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=\dfrac{6}{10}$. Директриси будуть горизонтальними прямими $x=x_0\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, $x=3\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, $x=3+\dfrac{100}{6}$, $x=3-\dfrac{100}{6}$.

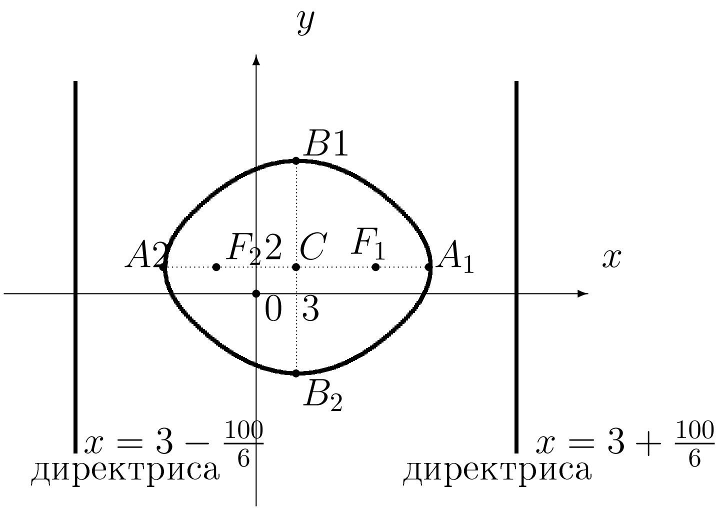

*рис.*10

□

Задача 49. *На площині задано криву* $100x^2+200x+36y^2-360y-2600=0$. *Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування. Виділяємо повні квадрати:
$$100x^2+200x+36y^2-360y-2600=0.$$

$$100(x^2+2x)+36(y^2-10y)-2600=0.$$

$$100(x^2+2x+1-1)+36(y^2-2\cdot y\cdot 5+5^2-5^2)-2600=0.$$

$$100(x+1)^2-100+36(y-5)^2-900-2600=0.$$

$$100(x+1)^2+36(y-5)^2=3600.$$

$$\frac{(x+1)^2}{6^2}+\frac{(y-5)^2}{10^2}=1.$$

Отримали рівняння еліпса.

Для канонічного рівняння

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

центр симетрії розташовано в точці $(x_0; y_0)$, тобто $C\,(-1;5)$. У випадку $b>a$ маємо $b=10$– велика піввісь симетрії, $a=6$–мала піввісь симетрії. Тому фокальний параметр $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$, фокуси розташовані на вертикальній прямій $x=-1$, яка паралельна OY, відхиляються вгору та вниз на відстань c, тому мають координати $F_1(x_0; y_0+c)$ та $F_2(x_0; y_0-c)$, тобто $F_1(-1; 5+8)$ та $F_2(-1; 5-8)$. Ексцентриситет такого еліпса $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\dfrac{8}{10}$. Директрисами еліпса у випадку $b>a$ будуть горизонтальними прямими які задаються рівняннями $y=y_0\pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ або $y=5\pm\dfrac{100}{8}$, тобто $y=17,5$, $y=-7,5$.

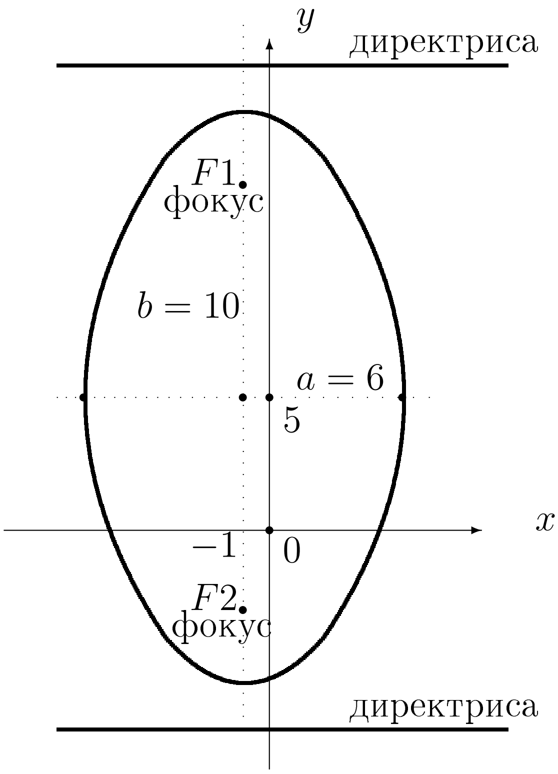

рис.11

□

Задача 50. *На площині задано рівняння кривої $225x^2 - 400y^2 - 3600 = 0$. Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування.

$$225x^2 - 400y^2 - 3600 = 0.$$

$$225x^2 - 400y^2 = 3600.$$

$$\frac{225x^2}{3600} - \frac{400y^2}{3600} = 1.$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отримали рівняння гіперболи. Нагадаємо, що гіперболою називається геометричне місце точок площини, для яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок F_1 та F_2 цієї площини, що називаються фокусами, є стала величина. До основних характеристик гіперболи відносяться: центр симетрії гіперболи, довжини піввісей, дійсна та уявна вісі симетрії, фокальний параметр, фокуси, ексцентриситет, асимптоти та директриси гіперболи. Для канонічного рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

центр симетрії розташовано у початку координат, a та b – довжини піввісей гіперболи, причому $y = 0$– дійсна вісь симетрії, $x = 0$ – уявна вісь симетрії. Фокальний параметр $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, фокуси мають координати $F_1(-c; 0)$ та $F_2(c; 0)$. Ексцентриситетом гіперболи називають число $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, що характеризує міру стиснення до вісі, що містить фокуси. Асимптотами гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, називають прямі, що задаються рівняннями $y = \pm\dfrac{b}{a}x$. Директрисами гіперболи називають прямі, що перпендикулярні до дійсної вісі симетрії та задаються рівняннями $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Дана гіпербола має рівняння $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$, Центр симетрії гіперболи розташовано у початку координат $O\,(0; 0)$, дійсна піввісь $a = 4$, уявна піввісь $b = 3$, фокальний параметр $c = \sqrt{4^2 + 3^2}$, $c = 5$. Фокуси гіперболи лежать на $y = 0$, відхиляючись від початку координат на величину $c = 5$, тобто $F_1(5; 0)$, $F_2(-5; 0)$. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$. Директрисами будуть вертикальні прямими $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, $x = \dfrac{16}{5}$, $x = -\dfrac{16}{5}$. Асимптоти гіперболи $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, тобто $y = \pm\dfrac{3}{4}x$.

Для побудови графіка бажано дотримуватися наступного алгоритму:

1) за рівнянням кривої знаходимо центр симетрії, з'ясовуємо значення дійсної та уявної піввісей симетрії, значення фокального параметра;

2) від центра симетрії $(0;0)$ кривої відкладаємо по горизонталі $\pm a$, по вертикалі $\pm b$. Будуємо прямокутник зі сторонами $2a$ та $2b$, причому він отримується в результаті перетину прямих $x = \pm a$, $y = \pm b$;

3) проводимо асимптоти гіперболи – діагоналі отриманого прямокутника, причому нас цікавлять зовнішні частини діагоналей;

4)визначаємо, де знаходяться вершини та фокуси гіперболи (завжди на дійсної вісі симетрії). Відмічаємо їх на малюнку;

5) проводимо віти гіперболи через вершини, наближжуючи їх до асимптот;

6) проводимо директриси гіперболи.

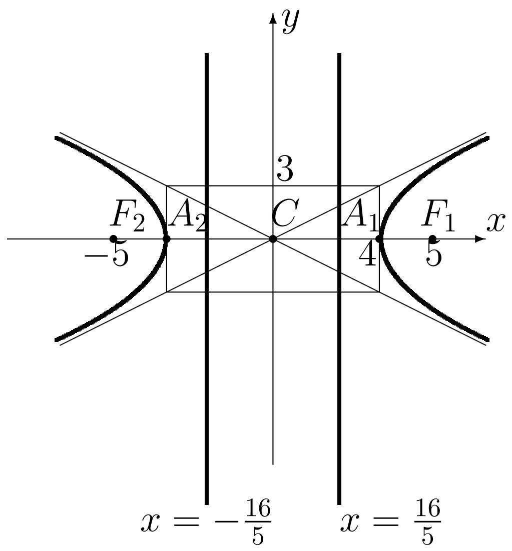

*рис.*12

□

Задача 51. *На площині задано рівняння кривої* $36x^2 - 64y^2 + 2304 = 0$. *Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування.

$$36x^2 - 64y^2 = -2304.$$

$$\frac{36x^2}{-2304} - \frac{64y^2}{-2304} = 1.$$

$$-\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Отримали рівняння гіперболи. Маємо канонічне рівняння

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

звертаємо увагу на те, що знак "мінус"знаходиться при x^2. В цьому випадку гіперболу називають спряженою і вона розміщена "вертикально". Для спряженої гіперболи центр симетрії також розташовано у початку координат, $a=8$ та $b=6$ – довжини півосей еліпса, причому $x=0$– дійсна вісь, $y=0$– уявна вісь симетрії. Фокальний параметр $c=\sqrt{a^2+b^2}=10$, фокуси мають координати $F_1(0;c)$ та $F_2(0;-c)$, $F_1(0;10)$, $F_2(0;-10)$. Ексцентриситет такої гіперболи є число $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\dfrac{10}{6}$, асимптотами гіперболи є прямі, що задаються рівняннями $y=\pm\dfrac{b}{a}x$, тобто $y=\pm\frac{3}{4}x$, а директрисами гіперболи будуть прямі, що перпендикулярні до дійсної вісі симетрії та мають рівняннями $y=\pm\dfrac{b}{\varepsilon}$, $y=\pm\frac{36}{10}$.

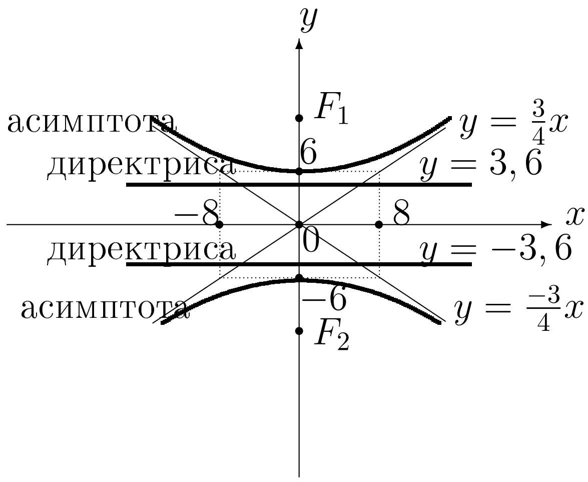

*рис.*13

□

Задача 52. *На площині задано рівняння кривої* $\dfrac{(x+4)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$. *Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування. Це рівняння гіперболи. Центр симетрії розташовано у точці $(-4;1)$, $a=3$ та $b=4$ – довжини піввісей гіперболи, причому $y=1$ дійсна вісь симетрії, $x=-4$ уявна вісь симетрії. Фокальний параметр $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=5$, фокуси мають координати $F_1\,(-4+5;1)$ та $F_2\,(-4-5;1)$, тобто $F_1\,(1;1)$ та $F_2\,(-9;1)$. Ексцентриситетом гіперболи буде число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}=$

$\frac{5}{3}$. Директрисами будуть вертикальні прямими $x = x_0 \pm \frac{a}{\varepsilon}$, $x = -4 \pm \frac{9}{5}$, $x = -\frac{11}{5}$, $x = \frac{-29}{5}$. Асимптоти гіперболи $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$, тобто $y = 1 \pm \frac{4}{3}(x + 4)$. Для побудови графіку будемо дотримуватися вищевказаного алгоритму:

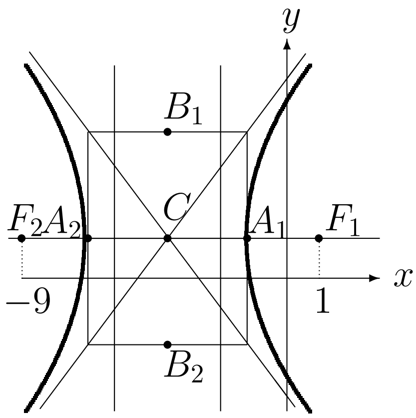

*рис.*14

□

Задача 53. *На площині задано рівняння кривої* $-400x^2 - 1600x + 225y^2 - 450y - 91375 = 0$. *Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування. Виділяємо повні квадрати:

$$-400x^2 - 1600x + 225y^2 - 450y - 91375 = 0.$$

$$-400(x^2 + 4x) + 225(y^2 - 2y) - 91375 = 0.$$

$$-400(x^2 + 4x + 4 - 4) + 225(y^2 - 2y + 1 - 1) - 91375 = 0.$$

$$-400(x + 2)^2 + 1600 + 225(y - 1)^2 - 225 - 91375 = 0.$$

$$-400(x + 2)^2 + 225(y - 1)^2 = 90000.$$

$$\frac{(x + 2)^2}{15^2} - \frac{(y - 1)^2}{20^2} = -1.$$

$$-\frac{(x + 2)^2}{15^2} + \frac{(y - 1)^2}{20^2} = 1.$$

Отримали рівняння гіперболи. Якщо гіпербола має рівняння $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, тоді потрібно перемістити початок координат у точку $(x_0; y_0)$ та врахувати відповідний зсув при обчисленні характеристик гіперболи, а саме фокуси мають координати $F_1(x_0 - c; y_0)$ та $F_2(x_0 + c; y_0)$, асимптотами гіперболи є прямі, що задаються рівняннями $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$, директрисами гіперболи будуть прямі, що мають рівняння $y = y_0 \pm \frac{a}{\varepsilon}$.

Дана гіпербола має рівняння $\frac{(x+2)^2}{15^2} - \frac{(y-1)^2}{20^2} = -1$, тому потрібно перемістити початок координат у точку $(-2;1)$. Центр симетрії гіперболи $(-2;1)$, уявна піввісь $a = 15$, дійсна піввісь $b = 20$, фокальний параметр $c = \sqrt{15^2 + 20^2}$, $c = 25$. У випадку b-дійсна піввісь симетрії фокуси гіперболи лежать на вертикальній прямій $x = -2$, відхиляючись від точки $(-2;1)$ вгору та вниз на величину $c = 25$, тобто $F_1(x_0; y_0 + c)$, $F_2(x_0; y_0 - c)$, а саме $F_1(-2;26)$, $F_2(-2;-24)$. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{25}{20}$. Директриси будуть горизонтальними прямими $y = y_0 \pm \frac{b}{\varepsilon}$, $y = 1 + \frac{400}{25}$, $y = 1 - \frac{400}{25}$. Таким чином, директриси $y = 17$, $y = -15$. Асимптоти гіперболи $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$, тобто $y - 1 = \pm\frac{20}{15}(x + 2)$.

Для побудови графіка виделенням повних квадратів, зводимо рівняння кривої до канонічного вигляду $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1$. Після цього дотримуємося вищеописаного алгоритму (див приклад 50).

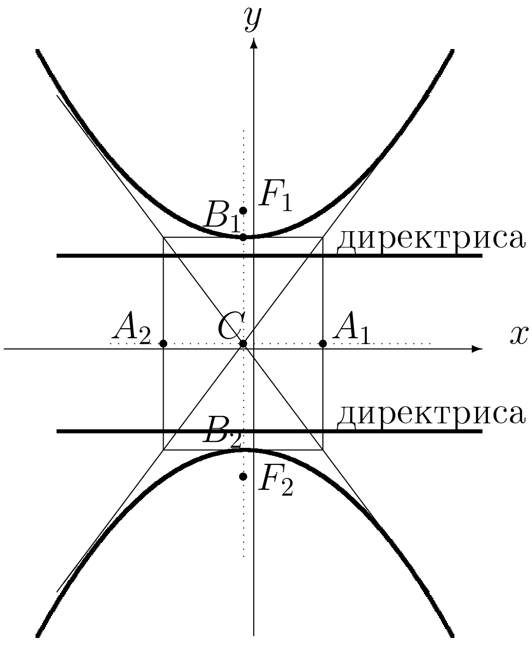

*рис.*15

□

Задача 54. *На площині задано криву другого поряку $x^2 - 8y = 0$. Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування. Дано: $x^2 - 8y = 0$. Оскільки в рівнянні присутній тільки один квадрат, то ми маємо рівняння параболи. Нагадаємо, що параболою називається геометричне місце точок площини, для яких відстань до деякої фіксованої точки F (яку називають фокусом) цієї площини дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої (яку називають директрисою) з цієї ж площини. До основних характеристик параболи відносять: вершину, вісь симетрії, фокальний параметр, фокус та директрису параболи.

Якщо $x^2 = 2py$ канонічне рівняння параболи, то $y = -\frac{p}{2}$ - директриса параболи, фокальний параметр $c = \frac{p}{2}$, а фокус має координати $F(0; c)$.

У даному випадку $x^2 = 2{\cdot}4y$, тобто $p = 4$. Вершина параболи знаходиться в точці $(0; 0)$, парабола симетрична відносно прямій $x = 0$, фокальний параметр $c = \frac{p}{2} = 2$. Маємо $y = -2$ - директриса параболи, фокус має координати $F(0; 2)$.

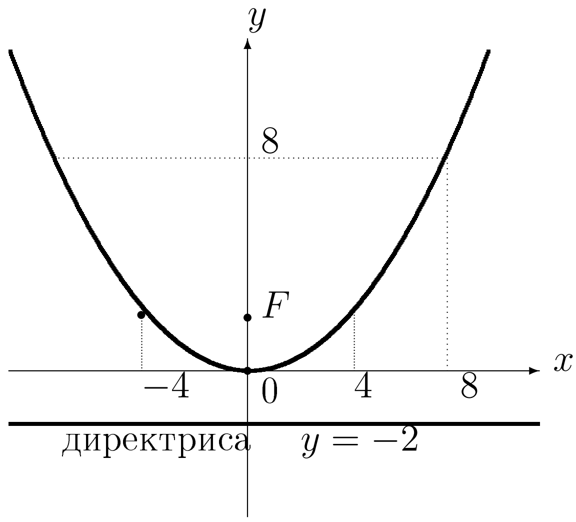

*рис.*16

□

Задача 55. *На площині задано криву другого поряку* $4x - y^2 = 0$. *Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування. Дано: $4x - y^2 = 0$. Оскільки в рівнянні присутній тільки один квадрат, то ми маємо рівняння параболи. Якщо $y^2 = 2px$ канонічне рівняння параболи, то $x = -\frac{p}{2}$ - директриса параболи, фокальний параметр $c = \frac{p}{2}$, а фокус має координати $F(; 0)$.

У даному випадку $y^2 = 2 \cdot 2x$, тоді вершина параболи $(0; 0)$, параметр $p = 2$, фокальний параметр $c = 1$, $x = -1$ - директриса параболи, фокус має координати $F(1; 0)$, $y = 0$ - вісь симетрії параболи.

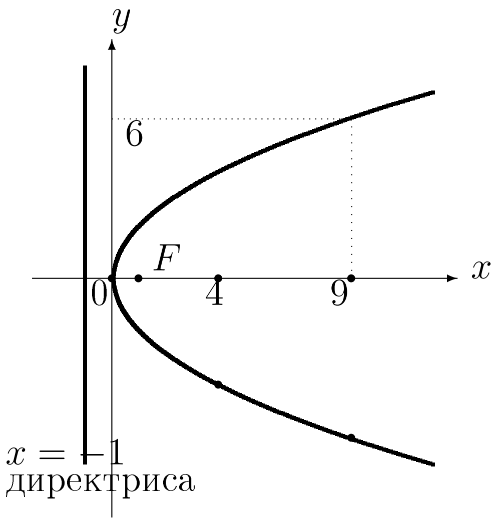

*рис.*17

□

Задача 56. *На площині задано криву другого поряку* $x + 12y^2 - 48y + 51 = 0$. *Знайти канонічне рівняння цієї кривої, визначити її основні характеристики та зробити відповідні креслення.*

Розв'язування. Дано: $x + 12y^2 - 48y + 51 = 0$. Оскільки в рівнянні присутній тільки один квадрат, то ми маємо рівняння параболи. У цьому випадку $12y^2 - 48y + 51 = -x$, тобто $12(y^2 - 4y) + 51 = -x$,
звідки $12 \cdot (y-2)^2 - 48 + 51 = -x \Rightarrow 12 \cdot (y-2)^2 = -x - 3$
або $(y-2)^2 = 2 \cdot \frac{-1}{24}(x+3)$ – це канонічне рівняння пераболи. Вершина параболи $(-3; 2)$, параметр $p = \dfrac{-1}{24}$, фокальний параметр $c = \dfrac{-1}{48}$, вісь симетрії кривої $y = 2$. Оскільки для зміщенної параболи необхідно враховувати зсув вершини, то $x = x_0 - \dfrac{p}{2}$ - директриса параболи, а фокус має координати $F(x_0 + c; y_0)$, тоді $x = -3 - \dfrac{-1}{48}$ - директриса параболи, фокус має координати $F(-3 + \dfrac{-1}{48}; 2)$.

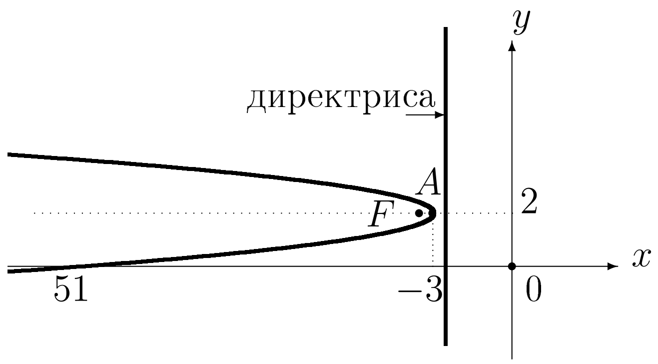

*рис.*18

Найпростіша ідея - зробити, як у школі:

$$x = -12y^2 + 48y - 51.$$

$$y_B = -\frac{b}{2a} = -\frac{48}{-24} = 2. \qquad x_B = -48 + 96 - 51 = -3.$$

Для того, щоб вісі координат були розміщені стандартно, потрібно повернути рисунок на 90° проти годинникової стрілки, а після цього зробити дзеркальну симетрію відносно вісі OY. $\square$

Рекомендована література

[1] Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения.– М.: Наука.-1985

[2] Завало С.Т. Курс алгебри. – К.: Вища школа,– 1985

[3] Дискант В. І., Береза Л. Р., Грижук О. П., Захаренко Л. М. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. – К.: Вища шк.,– 2001,

[4] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.– М.: Наука.–1999

[5] Калужнін Л. А., Вишенський В. А., Шуб Ц. О. Лінійні простори. – К.: Вища шк., 1971, 2010. – 344 с.

[6] Курош А.Г. Курс высшей алгебры.– М.: Наука.–1968

[7] Булдигін В.В., Алєксєєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Коновалова Н.Р., Федорова Л.Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – К.: ТВіМС, 2011. – 224с.

[8] Алєксєєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Практикум – К.: НТТУ "КПІ", 2013. – 180 с.

[9] Чарін В.С. Лінійна алгебраСборник задач по высшей алгебре.– М.:–1999

[10] Беллман Р. Введение в теорию матриц.– М.: Наука.–1976

[11] Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.– М.: Наука.–1966

[12] Завало С. Т., Костарчук В. М., Хацет Б. І. Алгебра і теорія чисел. Ч.1.– К.: Вища шк.,– 1974.

[13] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.1: Основы алгебры. – М.: Физматлит. –2001 геометрия.– М.–1985

[14] Стренг Г. Линейная алгебра и ее применения.– М.: Мир.–1980

Лінійна алгебра. Аналітична геометрія.
Збірник завдань для розрахункової роботи студентів

Укладачі:
Авдєєва Тетяна Василівна,
Листопадова Валентина Вікторівна,
Шраменко Володимир Миколайович